교사용 지도서

고|등|학|교

수학 I

신항균
이광연
박세원
신범영
이계세
김정화
박문환
윤정호
박상의
서원호
전제동
이동흔

(주)지학사

고 등 학 교

수학 I

교사용 지도서

(주)지학사

머리말

현대 과학 문명은 미처 예상하지 못한 분야까지 급속도로 발전하고 있으며, 그 발전의 중심에는 언제나 수학이 자리해 왔습니다. 이러한 상황 가운데 수학 교육의 중요성은 더욱 부각되고 있습니다. 하지만 수학은 일반적으로 어려운 교과로 인식되기 때문에 하고자 하는 의욕이 있음에도 효율적인 학습이 이루어지지 않는 경향이 많습니다. 그 이유는 여러 가지가 있지만 다음과 같이 두 가지로 요약할 수 있습니다.

첫째, 방법론의 문제입니다. 수학은 어느 교과보다도 체계적이고 논리적이기 때문에 단계적인 학습을 통하여 단원 상호 간의 연계적 이해가 이루어져야 합니다. 또한 수학은 누적적인 학문입니다. 오늘날의 수학은 오래전부터 발견되고 발전해 온 수학을 기초로 이루어져 있으므로 이를 무시하면 수학 학습은 마치 사상누각이 되는 것입니다. 따라서 수학은 반드시 기초부터 시작해야 하고, 이를 바탕으로 체계적이고 논리적으로 확장해 나가야 합니다. 그러나 수학을 학습하는 데 이와 같은 수학의 특징을 중요하지 않게 여기는 경향이 있습니다.

둘째, 응용력의 문제입니다. 이미 언급했듯이 수학은 논리적인 전개를 바탕으로 합니다. 그러므로 체계적인 이해를 전제로 하지 않은 단순한 암기와 기계적인 응용은 심도 있는 수학 학습에 한계를 불러옵니다. 즉, 어떠한 문제가 주어졌을 때, 문제의 성격과 해결 과정에 대한 철저한 사고 없이 문제 유형과 공식을 대응하여 해결하려는 식의 요령은 오히려 다양한 문제에 적용하는 데 한계를 가져오고 수학 학습을 보다 어렵게 느끼게 합니다.

본 교사용 지도서는 위와 같은 점들을 고려하여 단원 간의 연계와 원리의 이해 및 적용에 중점을 두고 편찬하였습니다. 그리고 선생님께서 학생들에게 수학을 지도할 때, 학생들이 보다 흥미와 관심을 가지고 쉽게 이해할 수 있도록 교과서 체계에 맞추어 구성하였습니다. 아울러 교과서의 활용에 도움이 되는 사항들을 함께 수록하였으며, 구체적인 활용 방법은 따로 설명하였습니다.

교육 현장에 계신 선생님께서 본 교사용 지도서를 효율적으로 사용하여 보다 알찬 수학 교육의 결실을 거두기 바랍니다.

지은이 씀

구성과 특징

교사용 지도서는 크게 총론과 각론으로 나누어, 교사들의 전문성 신장에 도움을 줄 수 있는 내용과 교과서의 각 단원 지도에 유용한 자료들을 제공하였습니다.

총론

수학 교육의 필요성 및 목적, 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해, 수학 교과서의 개발 동향, 수학적 문제 해결, 수학과 평가의 특징 및 방법, 좋은 수업의 의미, 수학과 수업 평가 등을 설명하였고, 교과서의 구성과 연간 지도 계획안을 제시하였습니다.

Ⅰ. 수학 교육의 필요성 및 목적

수학 교육은 한마디로 21세기 자유 민주주의 체제하의 정보 산업 사회를 살아갈 학생들에게 수학적 소양과 수학적 힘을 기르기 위해서 필요하다(NCTM, 1989). 전미수학교사협의회(NCTM)는 수학의 학습 목표로 수학의 가치를 알고, 수학을 하는 자신의 능력을 확신하며, 수학적으로 문제를 해결할 수 있으며, 수학적으로 의사소통할 수 있고, 수학적으로 추론할 수 있어야 한다는 것을 들고, 초·중등 수학 교육을 통해 일관되게 이러한 목표를 달성하기 위한 다양한 경험을 학생들에게 제시할 것을 요구하고 있다(1989, 2000).

또한 우리나라의 수학과 교육과정에서는 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르도록 설정하고 있다. 그리고 수량 관계나 도형에 관한 수학적 개념의 이해, 논리적인 사고력, 합리적인 문제 해결 능력과 태도는 과학을 비롯한 대부분 교과들의 성공적인 학습을 위해 필요하므로 수학은 다른 교과의 효율적인 학습에 기초가 되는 교과라고 기술하고 있다(교육과학기술부, 2011).

이러한 수학 교육의 필요성은 수학 교육의 목적과도 연계되어 있다. 그러나 운전 교습이나 수영 등과 같이 본인의 필요에 의하여 배우는 경우와는 달리, 학교 교육은 강제성을 띨 뿐만 아니라 그 교육 목적이 다분히 추상적이기 때문에 모든 사람들의 공감대를 형성하기는 쉽지 않다. 그럼에도 어떤 이유에서든 학교에서 수학 교육이 필요하다는 의견에 반대할 사람은 거의 없을 것이다. 이는 그리스 시대 이래로 이천 년 동안 수학이 어떤 식으로든 지도되어 왔다는 것에서 알 수 있으며, 현재의 수학 교육을 개선하기 위한 연구는 많지만 수학 교육의 필요성을 근본적으로 부정하는 연구는 없다는 사실에서도 입증된다.

일반적으로 수학 교육 관련 전문가들은 수학 교육의 목적으로 정신 도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성을 강조하고, 이러한 목적들을 학생들이 실감할 수 있도록 학교 수학 교육의 목표, 내용 및 방법 등을 정선하는 일이 중요하다고 지적한다.

01 정신 도야성

수학은 수학을 학습하는 학생들에게 논리적으로 추론하는 정신적 능력을 배양하는, 이른바 정신력 도야의 소재가 되며, 이러한 수학적 추론 과정은 정신적 능력의 훈련에 적합한 몇몇 요인들을 포함하고 있다(강완 외, 1998).

■ 엄밀성

수학적 활동에서 사고의 정확성, 엄밀성은 수학의 아름다움과 그 기능을 구성하는 필수적 요소이다. 수학적 활동을 통하여 학생들은 일반적 사고에도 수학적 엄밀성을 적용할 수 있게 되며, 결과적으로 이를 자신의 사고 활동의 한 성향으로 동화시킬 수 있게 된다.

■ 간결성

수학에서 사용되는 정의를 비롯하여 수학적 성질이나 사실, 원리, 정리 등은 모두 최소한의 언어로 최대한의 의미를 표현하려는 수단이다. 수학 학습을 통하여 훈련된 간결한 표현 능력은 자신의 생각이나 의도를 간단명료하게 표현하고 이해하는 데 또는 이해시키는 데 도움을 준다.

■ 논리성

수학적 활동에서 논리 정연한 추론 과정은 필수적 요소이며, 이에 대한 객관적 검증의 과정 등은 모두 일반적 문제 상황에서도 요구되는 것이다. 이는 수학적 추론 훈련을 통하여 얻을 수 있는 주요 정신 능력이다.

■ 일반성

수학적 아이디어나 개념은 추상화 과정을 거쳐 일반화됨으로써 그 적용 범위가 확대된다. 주어진 특정 상황을 분석하고, 그 결과를 추상화시켜 유사한 다른 상황에 적용하고자 하는 일반화 능력 역시 수학 학습을 통해 훈련될 수 있는 주요 정신 능력이다.

지금까지 언급한 바를 토대로 하면 수학은 엄밀성, 논리성, 합리성 등의 고등 정신 능력을 많이 사용하고 있는 교과목이라고 할 수 있다. 예를 들어 수학 교육에서 다루어지는 증명 과정, 문제 해결의 진행 단계를 통해서 학생들은 어떤 주장이나 이론의 근거를 분명히 하는 논리적인 엄밀성을 습득하게 되고, 이러한 논리적인 태도는 일상생활에서 자신이 어떤 주장이나 의견을 내세울 때나 어떤 일을 추진하기 위해 상대방을 이해시킬 때 절대적으로 필요한 요소이다. 더 나아가 이러한 태도나 능력은 실제의 문제 상황을 해결해 가는 과정에서 그 문제를 명확히 파악하여 합리적인 결과를 가져올 수 있게 하는 중요한 요소가 된다.

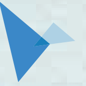
02 실용성

흔히 고등학교에서 배우는 정도의 수학조차도 일상생활에서 쓰이지 않는다고 한다. 예컨대 미적분은커녕 제곱근이나 인수분해 등과 같이 학교 교육에서 중요시되어 왔던 계산조차 좀처럼 쓸 일이 생기지 않는다고 한다. 따라서 일상생활에서 중학교 이상에서 다뤄진 수학 내용을 직접적으로 손쉽게 활용할 수 있는 실례가 그다지 많지 않으며, 여전히 수학을 실제로 필요로 하는 경우는 예전과 크게 다를 바 없이 특정 소수인을 위한 것이라고 여겨진다. 그러나 이처럼 '실용성'의 의미를 대중을 위한 학교 밖의 주변에서의 실용성으로 한정한다면, 비단 수학 교과뿐만 아니라 다른 교과에서도 학교 교육의 목적이 무의미해질 수밖에 없다. 가령 수학 교과의 지식을 통해 계산을 하고, 사회 교과의 지식을 통해 지도를 보고, 가정 교과의 지식을 통해 꽃밭 가꾸기를 하는 것에만 그 실용성의 의의를 둔다면, 학교 교육의 존재 가치 여부는 더 이상 논의될 필요가 없을 것이다. 따라서 물건을 사고 난 후의 거스름돈의 계산과 같은 간단한 문제 상황뿐만 아니라 어떤 상품을 구입하기 위해 여러 자료를 조사하고 가격을 비교하며 구매 조건 등을 분석하여 최선의 선택을 하는 과정까지도 실용성의 범주에 포함시켜야 할 것이다.

또한 학생들이 어린 시절부터 문학이나 과학 등에 소질을 보일 수도 있으나 현실적으로 초·중등 시절에는 장래의 직업에 대하여 아직 명확하다고 볼 수 없으므로, 장래의 직업 선택에 도움이 될 수 있도록 여러 방향의 가능성을 열어 놓은 상태의 교육이 필요함도 간과할 수는 없다. 이와 같은 의미에서 수학 교과의 학습은 더 의미 있고 필요한 것이라고 하겠다.

03 문화적 가치 및 심미성

학교에서 다뤄지는 수학은 학생들로 하여금 수학의 매력과 위력을 알게 함으로써 수학의 문화적 가치 및 심미성을 느끼고 표현할 수 있게 하며, 단지 필요에 의하여 개발하는 기술이나 도구에 비하여 한 차원 높은 사고를 경험하게 한다. 주어진 공간과 조건에 맞도록 대칭성과 반복을 활용하여 수학적인 균형과 완성미를 추구한 문화 유물에는 극소수의 전문가만이 느낄 수 있는 아름다움이 아니라 대다수 학생들도 충분히 느낄 수 있는 아름다움



각론

단원별 지도에 참고할 수 있는 지도 목표, 교수 · 학습상의 유의점, 지도 계획, 이론적 배경, 차시별 교수 · 학습 과정안(예시), 교과서 내용의 해설과 문제 풀이 및 교과서 내용 지도 시 유용한 자료들을 제시하였습니다.

단원의 지도 목표

1. 다항식의 연산
① 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.
② 다항식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.

2. 나머지정리
① 항등식의 의미를 이해하게 한다.
② 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

3. 인수분해
① 다항식의 인수분해를 할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 조립제법은 예를 통하여 그 방법을 간단히 다룬다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습	본 단원	후속 학습
[중1~3학년군] 자연수의 성질 문자와 식 일차방정식 단항식의 계산 다항식의 계산 다항식의 인수분해	1. 다항식의 연산 다항식의 덧셈과 뺄셈 다항식의 곱셈 다항식의 나눗셈 2. 나머지정리 항등식 나머지정리 3. 인수분해 인수분해	[수학 I] 복소수와 이차방정식 이차방정식과 이차함수 여러 가지 방정식

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~3	10~11	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 다항식의 연산	중단원 도입		12	• 문자의 사용과 수학의 발전	
	01 다항식의 덧셈과 뺄셈		13~15	• 다항식의 덧셈과 뺄셈	
	02 다항식의 곱셈	4~6	16~21	• 다항식의 곱셈 • 복잡한 다항식의 곱셈	
	03 다항식의 나눗셈	7	22~24	• 다항식의 나눗셈	
	수준별 학습	8	25~27	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 나머지정리	중단원 도입	9~10	28	• 등호 =의 의미	
	01 항등식		29~32	• 미정계수법	미정계수법
	02 나머지정리	11~13	33~38	• 나머지정리 • 인수정리 • 조립제법	나머지정리 인수정리 조립제법
	수준별 학습	14	39~41	• 중단원 확인 학습 문제	
3. 인수분해	중단원 도입	15~18	42	• 물의 분해와 인수분해	
	01 인수분해		43~48	• 인수분해 공식 • 복잡한 식의 인수분해 • 인수정리를 이용한 인수분해	
	수준별 학습	19	49~51	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		20~21	52~57	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 지도 목표

교육과정에 명시된 대단원의 지도 목표를 중단원 별로 제시하였습니다.

교수 · 학습상의 유의점

대단원의 지도에 있어서 유의해야 할 사항 중 교육과정에 명시된 내용을 설명하였습니다.

교수 · 학습의 계열

단원과 관련하여 선수 학습과 후속 학습의 연계성을 제시하였습니다.

단원의 차시별 지도 계획

중단원과 소단원별 교과서 쪽수, 지도 내용, 교육과정에 명시된 용어와 기호 등을 쉽게 알아볼 수 있도록 표로 정리하였습니다.

단원의 이론적 배경

단원의 이론적 배경과 이론이 발전되어 온 수학사적 배경을 설명하였습니다.

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

두 개의 차시에 해당하는 교수 · 학습 과정안을 예로 제시하였습니다.

구성과 특징

중단원을 시작하며

교육과정에 명시된 중단원의 지도 목표를 제시하였습니다.

중단원의 구성

중단원의 소단원명과 각 소단원의 지도 내용을 제시하였습니다.

들어가면서

중단원 도입에 소개된 실생활 소재와 단원과의 관련성을 설명하였습니다.

성취 기준과 성취 수준

교육과정에 제시된 단원의 성취 기준 및 상, 중, 하 수준별 성취 수준을 제시하였습니다.

소단원 지도 목표

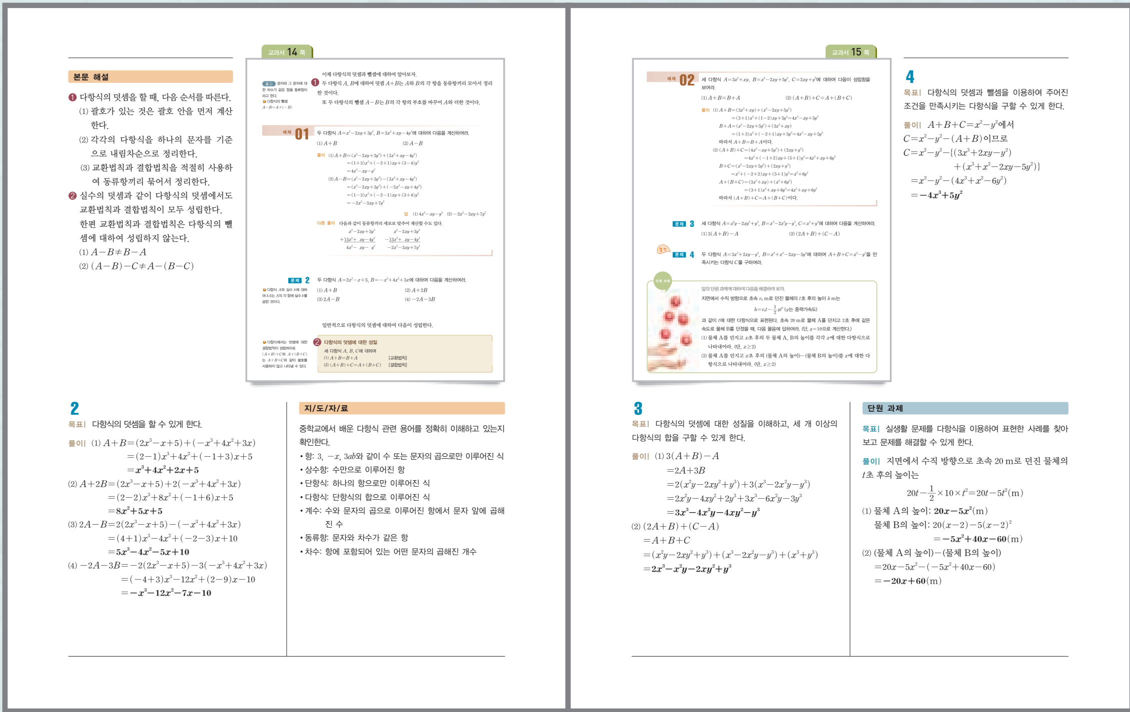
소단원별로 세부적이고 구체적인 지도 목표를 제시하였습니다.

교수 · 학습상의 유의점

소단원의 지도에 있어서 특별히 유의해야 할 사항을 정리하였습니다.

새로 나온 용어와 기호

소단원에서 새로 배우게 될 교육과정에 명시된 용어와 기호를 제시하였습니다.



본문 해설

❶ 다항식의 덧셈을 할 때, 다음 순서를 따른다.
(1) 괄호가 있는 것은 괄호 안을 먼저 계산한다.
(2) 각각의 다항식을 하나의 문자를 기준으로 내림차순으로 정리한다.
(3) 교환법칙과 결합법칙을 적절히 사용하여 동류항끼리 묶어서 정리한다.

❷ 실수의 덧셈과 같이 다항식의 덧셈에서도 교환법칙과 결합법칙이 모두 성립한다. 한편 교환법칙과 결합법칙은 다항식의 뺄셈에 대하여 성립하지 않는다.
(1) $A-B\neq B-A$
(2) $(A-B)-C\neq A-(B-C)$

2

목표| 다항식의 덧셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $A+B=(2x^3-x+5)+(-x^3+4x^2+3x)$
$=(2-1)x^3+4x^2+(-1+3)x+5$
$=\mathbf{x^3+4x^2+2x+5}$
(2) $A+2B=(2x^3-x+5)+2(-x^3+4x^2+3x)$
$=(2-2)x^3+8x^2+(-1+6)x+5$
$=\mathbf{8x^2+5x+5}$
(3) $2A-B=2(2x^3-x+5)-(-x^3+4x^2+3x)$
$=(4+1)x^3-4x^2+(-2-3)x+10$
$=\mathbf{5x^3-4x^2-5x+10}$
(4) $-2A-3B=-2(2x^3-x+5)-3(-x^3+4x^2+3x)$
$=(-4+3)x^3-12x^2+(2-9)x-10$
$=\mathbf{-x^3-12x^2-7x-10}$

지/도/자/료

중학교에서 배운 다항식 관련 용어를 정확히 이해하고 있는지 확인한다.
- 항: 3, $-x$, $3ab$와 같이 수 또는 문자의 곱으로만 이루어진 식
- 상수항: 수만으로 이루어진 항
- 단항식: 하나의 항으로만 이루어진 식
- 다항식: 단항식의 합으로 이루어진 식
- 계수: 수와 문자의 곱으로 이루어진 항에서 문자 앞에 곱해진 수
- 동류항: 문자와 차수가 같은 항
- 차수: 항에 포함되어 있는 어떤 문자의 곱해진 개수

4

목표| 다항식의 덧셈과 뺄셈을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 다항식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $A+B+C=x^2-y^2$에서
$C=x^2-y^2-(A+B)$이므로
$C=x^2-y^2-\{(3x^3+2xy-y^2)+(x^3+x^2-2xy-5y^2)\}$
$=x^2-y^2-(4x^3+x^2-6y^2)$
$=\mathbf{-4x^3+5y^2}$

3

목표| 다항식의 덧셈에 대한 성질을 이해하고, 세 개 이상의 다항식의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $3(A+B)-A$
$=2A+3B$
$=2(x^2y-2xy^2+y^3)+3(x^3-2x^2y-y^3)$
$=2x^2y-4xy^2+2y^3+3x^3-6x^2y-3y^3$
$=\mathbf{3x^3-4x^2y-4xy^2-y^3}$
(2) $(2A+B)+(C-A)$
$=A+B+C$
$=(x^2y-2xy^2+y^3)+(x^3-2x^2y-y^3)+(x^3+y^3)$
$=\mathbf{2x^3-x^2y-2xy^2+y^3}$

단원 과제

목표| 실생활 문제를 다항식을 이용하여 표현한 사례를 찾아보고 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 지면에서 수직 방향으로 초속 20 m로 던진 물체의 t초 후의 높이는
$$20t-\frac{1}{2}\times10\times t^2=20t-5t^2\,(\text{m})$$
(1) 물체 A의 높이: $\mathbf{20x-5x^2}$(m)
물체 B의 높이: $20(x-2)-5(x-2)^2$
$=\mathbf{-5x^2+40x-60}$(m)
(2) (물체 A의 높이)−(물체 B의 높이)
$=20x-5x^2-(-5x^2+40x-60)$
$=\mathbf{-20x+60}$(m)

생각 열기 참고 자료

생각 열기와 관련된 내용에 대한 충분한 설명을 제시하였습니다.

탐구 활동의 이해

탐구 활동의 목표와 자세한 풀이를 제시하였습니다.

본문 해설

교과서에 제시된 학습 내용을 해설하고, 보다 자세한 설명을 덧붙였습니다.

지도 자료

내용 지도 시 필요한 보충 설명이나 기호에 대한 설명을 제시하였습니다.

읽기 자료

수학사, 생활 속 수학 등 각종 읽기 자료를 제시하였습니다.

문제의 해설

교과서 본문에 있는 모든 문제의 출제 의도 및 지도 목표와 자세한 풀이를 제시하였습니다.

수행 과제

수행 과제의 출제 의도와 구체적인 예시 답안을 제시하였습니다.

대단원 학습 내용 정리

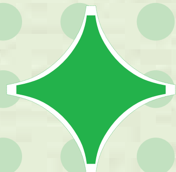
단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하였습니다.

대단원 평가 문제

단원 마무리에 나온 대단원 평가 문제의 지도 목표 및 풀이를 제시하였습니다.

수학 플러스

단원과 관련된 수학, 과학, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 등의 이야기를 소개하였습니다.



그들과 이야기를 나누며
가장 크게 깨달은 것은 자기가 진정으로
하고 싶어하는 것이 무엇인지 깨닫는다면
그 일을 미래의 어느 날로 미루지 말고,
또 그 일을 할 수 없는 이유들을 찾지 말고
'바로 지금' 시작해야 한다는 것이다.
흘러가는 시간은 언젠가 이룰 꿈을 위해
마냥 기다려주지 않으니까.

– 용서해의 《삶의 마지막 축제》 중에서 –

차례

총론

Ⅰ. 수학 교육의 필요성 및 목적

수학 교육은 한마디로 21세기 자유 민주주의 체제하의 정보 산업 사회를 살아갈 학생들에게 수학적 소양과 수학적 힘을 기르기 위해서 필요하다(NCTM, 1989). 전미수학교사협의회(NCTM)는 수학의 학습 목표로 수학의 가치를 알고, 수학을 하는 자신의 능력을 확신하며, 수학적으로 문제를 해결할 수 있으며, 수학적으로 의사소통할 수 있고, 수학적으로 추론할 수 있어야 한다는 것을 들고, 초 · 중등 수학 교육을 통해 일관되게 이러한 목표를 달성하기 위한 다양한 경험을 학생들에게 제시할 것을 요구하고 있다(1989, 2000).

또한 우리나라의 수학과 교육과정에서는 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르도록 설정하고 있다. 그리고 수량 관계나 도형에 관한 수학적 개념의 이해, 논리적인 사고력, 합리적인 문제 해결 능력과 태도는 과학을 비롯한 대부분 교과들의 성공적인 학습을 위해 필요하므로 수학은 다른 교과의 효율적인 학습에 기초가 되는 교과라고 기술하고 있다(교육과학기술부, 2011).

이러한 수학 교육의 필요성은 수학 교육의 목적과도 연계되어 있다. 그러나 운전 교습이나 수영 등과 같이 본인의 필요에 의하여 배우는 경우와는 달리, 학교 교육은 강제성을 띨 뿐만 아니라 그 교육 목적이 다분히 추상적이기 때문에 모든 사람들의 공감대를 형성하기는 쉽지 않다. 그럼에도 어떤 이유에서든 학교에서 수학 교육이 필요하다는 의견에 반대할 사람은 거의 없을 것이다. 이는 그리스 시대 이래로 이천 년 동안 수학이 어떤 식으로든 지도되어 왔다는 것에서 알 수 있으며, 현재의 수학 교육을 개선하기 위한 연구는 많지만 수학 교육의 필요성을 근본적으로 부정하는 연구는 없다는 사실에서도 입증된다.

일반적으로 수학 교육 관련 전문가들은 수학 교육의 목적으로 정신 도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성을 강조하고, 이러한 목적들을 학생들이 실감할 수 있도록 학교 수학 교육의 목표, 내용 및 방법 등을 정선하는 일이 중요하다고 지적한다.

01 정신 도야성

수학은 수학을 학습하는 학생들에게 논리적으로 추론하는 정신적 능력을 배양하는, 이른바 정신력 도야의 소재가 되며, 이러한 수학적 추론 과정은 정신적 능력의 훈련에 적합한 몇몇 요인들을 포함하고 있다(강완 외, 1998).

■ 엄밀성

수학적 활동에서 사고의 정확성, 엄밀성은 수학의 아름다움과 그 기능을 구성하는 필수적 요소이다. 수학적 활동을 통하여 학생들은 일반적 사고에도 수학적 엄밀성을 적용할 수 있게 되며, 결과적으로 이를 자신의 사고 활동의 한 성향으로 동화시킬 수 있게 된다.

■ 간결성

수학에서 사용되는 정의를 비롯하여 수학적 성질이나 사실, 원리, 정리 등은 모두 최소한의 언어로 최대한의 의미를 표현하려는 수단이다. 수학 학습을 통하여 훈련된 간결한 표현 능력은 자신의 생각이나 의도를 간단명료하게 표현하고 이해하는 데 또는 이해시키는 데 도움을 준다.

■ 논리성

수학적 활동에서 논리 정연한 추론 과정은 필수적 요소이며, 이에 대한 객관적 검증의 과정 등은 모두 일반적 문제 상황에서도 요구되는 것이다. 이는 수학적 추론 훈련을 통하여 얻을 수 있는 주요 정신 능력이다.

■ 일반성

수학적 아이디어나 개념은 추상화 과정을 거쳐 일반화됨으로써 그 적용 범위가 확대된다. 주어진 특정 상황을 분석하고, 그 결과를 추상화시켜 유사한 다른 상황에 적용하고자 하는 일반화 능력 역시 수학 학습을 통해 훈련될 수 있는 주요 정신 능력이다.

지금까지 언급한 바를 토대로 하면 수학은 엄밀성, 논리성, 합리성 등의 고등 정신 능력을 많이 사용하고 있는 교과목이라고 할 수 있다. 예를 들어 수학 교육에서 다루어지는 증명 과정, 문제 해결의 진행 단계를 통해서 학생들은 어떤 주장이나 이론의 근거를 분명히 하는 논리적인 엄밀성을 습득하게 되고, 이러한 논리적인 태도는 일상생활에서 자신이 어떤 주장이나 의견을 내세울 때나 어떤 일을 추진하기 위해 상대방을 이해시킬 때 절대적으로 필요한 요소이다. 더 나아가 이러한 태도나 능력은 실제의 문제 상황을 해결해 가는 과정에서 그 문제를 명확히 파악하여 합리적인 결과를 가져올 수 있게 하는 중요한 요소가 된다.

02 실용성

흔히 고등학교에서 배우는 정도의 수학조차도 일상생활에서 쓰이지 않는다고 한다. 예컨대 미적분은커녕 제곱근이나 인수분해 등과 같이 학교 교육에서 중요시되어 왔던 계산조차 좀처럼 쓸 일이 생기지 않는다고 한다. 따라서 일상생활에서 중학교 이상에서 다뤄진 수학 내용을 직접적으로 손쉽게 활용할 수 있는 실례가 그다지 많지 않으며, 여전히 수학을 실제로 필요로 하는 경우는 예전과 크게 다를 바 없이 특정 소수인을 위한 것이라고 여겨진다. 그러나 이처럼 '실용성'의 의미를 대중을 위한 학교 밖의 주변에서의 실용성으로 한정한다면, 비단 수학 교과뿐만 아니라 다른 교과에서도 학교 교육의 목적이 무의미해질 수밖에 없다. 가령 수학 교과의 지식을 통해 계산을 하고, 사회 교과의 지식을 통해 지도를 보고, 가정 교과의 지식을 통해 꽃밭 가꾸기를 하는 것에만 그 실용성의 의의를 둔다면, 학교 교육의 존재 가치 여부는 더 이상 논의될 필요가 없을 것이다. 따라서 물건을 사고 난 후의 거스름돈의 계산과 같은 간단한 문제 상황뿐만 아니라 어떤 상품을 구입하기 위해 여러 자료를 조사하고 가격을 비교하며 구매 조건 등을 분석하여 최선의 선택을 하는 과정까지도 실용성의 범주에 포함시켜야 할 것이다.

또한 학생들이 어린 시절부터 문학이나 과학 등에 소질을 보일 수도 있으나 현실적으로 초·중등 시절에는 장래의 직업에 대하여 아직 명확하다고 볼 수 없으므로, 장래의 직업 선택에 도움이 될 수 있도록 여러 방향의 가능성을 열어 놓은 상태의 교육이 필요함도 간과할 수는 없다. 이와 같은 의미에서 수학 교과의 학습은 더 의미있고 필요한 것이라고 하겠다.

03 문화적 가치 및 심미성

학교에서 다뤄지는 수학은 학생들로 하여금 수학의 매력과 위력을 알게 함으로써 수학의 문화적 가치 및 심미성을 느끼고 표현할 수 있게 하며, 단지 필요에 의하여 개발하는 기술이나 도구에 비하여 한 차원 높은 사고를 경험하게 한다. 주어진 공간과 조건에 맞도록 대칭성과 반복을 활용하여 수학적인 균형과 완성미를 추구한 문화유물에는 극소수의 전문가만이 느낄 수 있는 아름다움이 아니라 대다수 학생들도 충분히 느낄 수 있는 아름다움

이 들어 있으며, 매우 간단한 수학적 원리를 활용하여 흥미진진한 게임을 하는 예에서도 그 심미적 가치를 쉽게 찾을 수 있다. 또한 수학의 아름다움이나 매력은 미적분의 기본 정리에서부터 신라 시대의 술병에 이르기까지 다양한 대상과 수준에서 발견될 수 있다. 이와 같은 풍부한 자료와 유연한 해석을 통하여 문화적 가치, 수학 고유의 심미성을 적절한 수준에서 확인하는 경험은 고등학교를 떠남과 동시에 수학과 멀어지는 대부분의 학생들에게 반드시 필요하다.

수학 교육에서 놓치지 말아야 하는 것은 모든 건전한 시민을 위한 공통적으로 기본적이면서도 필수적인 수학 내용이 무엇인가를 분명히 하는 것이다. 따라서 수학 교육은 모든 학생들에게 꼭 필요한 내용이 무엇인지 명확히 정할 필요가 있으며 그것이 다양한 상황과 측면에 적용되면서 철저히 그리고 깊이 있게 이해되도록 돕는 것이 필요할 것이다. 궁극적으로 교육의 목적은 학생의 잠재력을 계발하고, 건전한 사회인으로서의 역할을 수행하도록 돕는 데 있다. 다른 교과 교육이 그러하듯이 수학도 현대 사회와 미래 사회를 살아갈 건전한 시민으로서 그 사회를 지탱하는 문명적, 문화적 기저 중에서 수학을 기반으로 하는 것에 대하여 수학적으로 이해하는 눈을 기르기 위해 배우는 것이다.

결국 수학을 가르쳐야 하는 이유는 수학의 내용이 인간과 환경에 관한 각종 현상을 보는 안목과 수단을 제공해 주기 때문이다. 수학적 안목의 고양이라는 것은 수학의 실용성과도 연결될 수 있지만 그보다는 경제 · 사회 · 문화 등 제 분야에 녹아 있는 수학적 현상이나 원리 · 모델 등을 파악하여 이들 분야를 더욱 깊이 있고 창의적인 방법으로 이해할 수 있도록 하는 것을 의미한다. 또한 수학은 어떤 문제를 여러 가지 수학적 방법으로 해결하게 함으로써 문제 해결의 지혜를 기르고, 한 현상에 담긴 수학적 질서를 이해하기 위해 배우며, 사물의 법칙과 질서에 대한 수학적 이해력을 기르기 위해 배운다고도 할 수 있다. 즉, 조각상의 무게중심, 물건 구매, 유전자의 배열, 황금 비율, 투자에 따른 수익률, 건축, 디지털의 세계, 자동차의 속도와 회전 등 일상생활의 다양한 모습들을 수학적으로 이해하기 위해서 수학을 배우는 것이다(황혜정 외, 2012).

II. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해

2009년 12월 23일에 교육과정 총론이 발표됨에 따라 2011년 8월 9일, 2009 개정 교육과정에 따른 '수학과 교육과정'이 최종 확정 및 공표되었다. 이 교육과정은 2013년부터 현장에 적용되고 있으며, 이에 대한 개정 배경 및 방향, 창의성 강조를 위한 수학적 과정(mathematical process)의 반영, 교육과정 문서의 구성 및 체제, 학교급별 주요 내용 변화에 대해 간략히 살펴보면 다음과 같다.

01 개정의 기본 방향

새로운 수학과 교육과정에서는 우선적으로 2009 개정 교육과정 총론의 취지에 부합하고 기존 수학과 교육과정의 문제점을 극복할 수 있는 새로운 교육과정의 성격, 목표, 내용 등을 개발하는 데 주력하였다. 특히 미래 사회에서 요구되는 핵심 역량의 주요 요소인 창의 중심의 교육과정 운영 및 교과용 도서 구현이 가능하도록 이에 따른 교육 목표와 내용을 개발하는 데에 초점을 두었으며, 다음의 항목을 구현하고자 하는 것이 새로운 교육과정의 주요 개발 방향이다.

가. 수학 교과 내용의 양 20 % 경감

2009 개정 교육과정 총론의 '교육과정 편성 · 운영 지침'의 주요 변화 내용 중 2007 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 대비 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 내용 20 % 경감의 배경이 될 수 있는 근거는 학교의 특성, 학생 · 교사 · 학부모의 요구 및 필요에 따라 학교가 자율적으로 교과(군)별 20 % 범위 내에서 시수를 증감하여 운영할 수 있는 데 있다(교육과학기술부, 2009). 2009 개정 교육과정 총론에서는 각 교과별로 교육과정의 성취 기준을 개발할 경우 학습량이 증가하여 교육 내용의 적정화를 저해할 우려가 있음을 염두에 두고, 교과별 교육과정 개발 시 현행 교육과정 대비 20 %의 내용이 경감되어야 함을 적극 주장하였다(박순경, 2010). 즉, 기준 수업 시수를 감안하되 교과 내용의 양은 현행 교육과정보다 20 % 정도 감축한다고 상정하고 최적한 학습 내용을 정선함으로써 보다 질 높은 교과 교육과정을 추구하도록 하였다.

나. 수학적 창의성 강조에 따른 수학적 과정

(1) 수학적 창의성의 의미

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 수학적 과제를 해결하는 과정에서 다양하고 독창적인 해결 방법을 산출하거나 새로운 관점에서 과제를 탐구하고 지식을 구성하는 능력을 의미한다. 여기서 수학적 과제는 학생들의 수학적 능력 계발을 위한 내용적 배경을 제공하는 것으로서, 예를 들어 학생들이 참여하게 되는 프로젝트, 질문, 문제, 활동 등을 망라한 것이다.

이와 같은 수학적 창의성을 계발하기 위해서는 우선 학생들이 정형화된 틀이나 형식에 얽매이지 않고 자신의 수학적 아이디어를 자유롭게 표현할 수 있는 분위기를 조성해 주어야 한다. 이와 같은 학습 상황에서 학생들은 수학을 학습하고 행하는 과정에서 과제에 대한 호기심, 사고와 판단에서의 독자성, 과제 해결에 대한 집착성과 끈기 등과 같은 창의성의 정의적 측면도 발전시키게 될 것이다.

한편 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 학교 수준에서의 수학적 창의성을 의미하기 때문에, 학습자가 수학적 추론과 통찰을 활용하여 기존의 지식과 경험을 유의미한 방법으로 분석 · 연결 · 통합하는 과정에서 창의성이 발현된다고 본다. 또한 학교 수학을 통해서 수학적 창의성을 계발할 때에는 창의적인 사고와 관련되는 일련의 과정을 수학적으로 의사소통하고 표현하는 능력도 신장시켜야 할 것이다.

(2) 수학적 과정의 의미 및 반영

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서 말하는 '수학적 과정'은 수와 연산, 도형 등의 내용 영역에서 다루는 수학적 주제를 이해하고 습득하는 데에서, 그리고 그러한 수학적 주제를 활용하여 다양한 현상을 이해하고 문제를 해결하고 의사소통하는 데에서 활성화되어야 하는 능력을 의미한다. 다시 말해서 '수학적 과정'은 학생들 주변의 다양한 현상을 수학과 연결하고 다양한 상황에서 발생하는 문제를 해결할 때 활성화되어야 하는 수학의 과정적 기능을 의미하며, '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통' 등을 구성 요소로 가지는 개념으로 정의하였다.

여기서 '수학적 문제 해결'은 수학의 문제나 문제적 상황에서 그 해를 찾아내기 위하여 이미 알고 있는 수학의 개념, 원리, 법칙 등의 지식이나 기능을 바탕으로 수학적 발견술이나 전략 등의 다양하면서 종합적인 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. '수학적 추론'은 수학적 현상이나 사실 등을 대상으로 그와 관련된 잠재적인 수학적 규칙성이나 원리, 구조 등에 결론적으로 이르기 위한 논리적 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. 그리고 '수학적 의사소통'은 수학의 아이디어나 생각 등을 수학적 표현 수단을 통하여 서로 공유하고 학습하게 되는 과정을 수행하는 것을 의미한다(NCTM, 2000).

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 구성 체제를 살펴보면, '목표', '내용', '교수 · 학습 방법', '평가' 등의 순으로 구성되어 있다. 학교에서 구체적으로 학습해야 할 수학 성취 기준은 '내용'에서 학년(군)별로 제시되어 있다. 한편 '수학적 과정'의 하위 구성 요소로 설정한 '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통'은 우리나라의 수학과 교육과정에서 지속적으로 강조되어 온 사항이다. 2007 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서도 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통을 강조하고 있다.

학교의 수학 교수 · 학습의 실질적인 모습을 결정한다고 할 수 있는 교과서의 경우, 그 내용은 주로 수학과 교육과정의 '내용'에 제시되어 있는 성취 기준을 중심으로 구성된다. 현행 수학과 교육과정과 같이 '목표'와 '교수 · 학습 방법'에서 '수학적 과정'과 관련된 제 측면을 과거와 같이 선언적으로만 제시하는 것은, '수학적 과정'과 관련된 제 측면들이 교과서의 내용 구성에 배경으로서 암묵적으로 스며들게 되는 장점이 있다고 볼 수 있지만, 학생들에게 적극적이고 명확하게 지도되지 않는다는 한계점 또한 지니고 있다.

따라서 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 현행 수학과 교육과정의 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 선언적으로 제시되고 있는 '수학적 과정'의 제 측면들을 보다 구체적인 성취 기준을 가지고 '내용'의 진술에 포함시킴으로써 교과용 도서 및 수업 상황에서 수학적 과정과 관련된 제 측면들을 더욱 적극적이고 분명히 다루게 하고 있다. 한마디로 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통'을 '수학적 과정'으로 간주하고, 이를 학습 내용 성취 기준 및 교수 · 학습상의 유의점, 그리고 교수 · 학습 방법 등에 반영하였다.

수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통의 특징은 각각 다음과 같다.

〈표 Ⅱ-1〉 수학적 과정의 요소 및 특징

수학적 문제 해결
가. 주어진 문제의 해결에 필요한 정보를 확인 또는 보완하고 적절한 전략이나 사고 과정을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
나. 수학적인 방법으로 문제 해결의 과정과 결과의 타당성을 설명할 수 있다.
다. 문제 해결 과정이나 완결 후 문제 제기를 통하여 문제 해결을 발전적으로 이끌 수 있다.
라. 문제 해결에서 얻은 결과와 사용된 전략을 일반화하여 새로운 문제 상황에 적용할 수 있다.

수학적 추론
가. 수학적 추측이나 주장을 만들고, 수학적 지식에 근거하여 이를 정당화할 수 있다.
나. 수학적 아이디어나 사고 과정을 수학적인 방법으로 검증할 수 있다.
다. 수학적 활동에서 다양하고 독창적인 아이디어가 지니는 가치를 인식할 수 있다.
수학적 의사소통
가. 수학적인 방법을 활용하여 자신의 생각을 논리적으로 정확하게 표현하고, 다른 사람을 이해시킬 수 있다.
나. 수학적 활동 중에 자신의 수학적인 생각을 다른 사람과 주고받는 활동의 중요성을 인식하고, 이를 통하여 자신의 생각을 개선시킬 수 있다.
다. 다른 사람의 수학적 아이디어나 사고 과정을 이해하고 평가할 수 있다.

(3) 학년군제 도입 및 적용

2009 개정 교육과정 총론의 초 · 중등학교 교육과정 구성의 방침에 의하면 “교육과정 편성 · 운영의 경직성을 탈피하고, 학년 간 상호 연계와 협력을 통한 학교 교육과정 편성 · 운영의 유연성을 부여하기 위하여 학년군을 설정한다.”라고 규정하고 있다(교육과학기술부, 2009).

현재 2007 개정 교육과정 체제에서는 학년제를 따르고 있다. 즉, 각 학년에서 배워야 할 내용을 학년별로 제시하였다. 반면 학년군제는 학생들이 배워야 할 내용을 학년별이 아니라 몇 개 학년을 묶어서 제시한다. 예를 들어 초등학교 1학년에서 2학년 사이에 학습할 내용을 초등학교 1~2학년군으로 제시하는 것이다.

학년군제 도입에 따른 가장 큰 변화는 학생들의 수준별 학습이다. 학년군제를 실시하는 것은 학생들의 학습 수준의 차이를 인정하는 것이다. 이해가 빠른 학생들은 더 많은 내용을 혹은 더 깊은 내용을 학습할 수 있고, 이해가 느린 학생들은 기본적인 내용을 집중적으로 학습할 수 있다. 학생들은 자신의 흥미나 적성을 고려하여 필요한 수학 교과를 선택할 수 있으며, 이는 학생들의 진로 선택과 관련될 수 있다.

또 다른 변화는 학년군제에서는 다양한 교과서가 사용될 수 있다는 것이다. 교육과정에서 엄격한 학년의 구분이 없어지고 내용이 통합적으로 제시되기 때문에 관련 내용들을 여러 가지 방법으로 재배치할 수 있게 된다. 예를 들어 초등학교 1학년과 2학년에서 학습할 수와 연산 영역을 초등학교 1학년에서 집중적으로 학습하도록 하는 교과서를 구성할 수 있다. 또는 중학교에서 대수와 함수를 밀접하게 관련시켜서 교과서를 구성할 수 있다. 즉, 수학 교과가 가진 특성을 발휘하여 학생들의 창의력을 발달시킬 수 있는 다양한 교과서의 출현이 가능하게 된다.

그러나 학년군제에 따르는 단점들도 충분히 예상되기 때문에 학년군제를 실행하기 위해서는 다음과 같은 사항들에 대한 해결 방안이 모색되어야 한다.

첫째, 수준별 수업 방안이 마련되어야 한다. 학년제 대신에 학년군제를 실시하는 취지 중의 하나는 학생들의 학습 수준 차를 인정하고 학생들의 수준에 맞는 학습을 통해서 사고 발달과 진로 선택에 긍정적인 효과를 주기 위함이다. 따라서 학생들의 수준에 적합한 수업이 가능한 수준별 수업 방안이 마련되어야 한다.

둘째, 수준별 수업이 원활히 시행되기 위해서는 적절한 평가 기준이 마련되어야 한다. 학생들의 다양한 진로와 흥미를 고려하여 과목을 이수하고 이에 대한 타당한 평가가 이루어져야 한다.

셋째, 교육과정이 학년군으로 구성되더라도 학년별로 교과서가 어떻게 저술되어야 하는지에 대한 기준이 필요하다.

넷째, 전학생들을 위한 보충 학습 과정 등 교수 · 학습 방안 및 정책이 마련되어야 한다.

02 수학과 교육과정의 특징

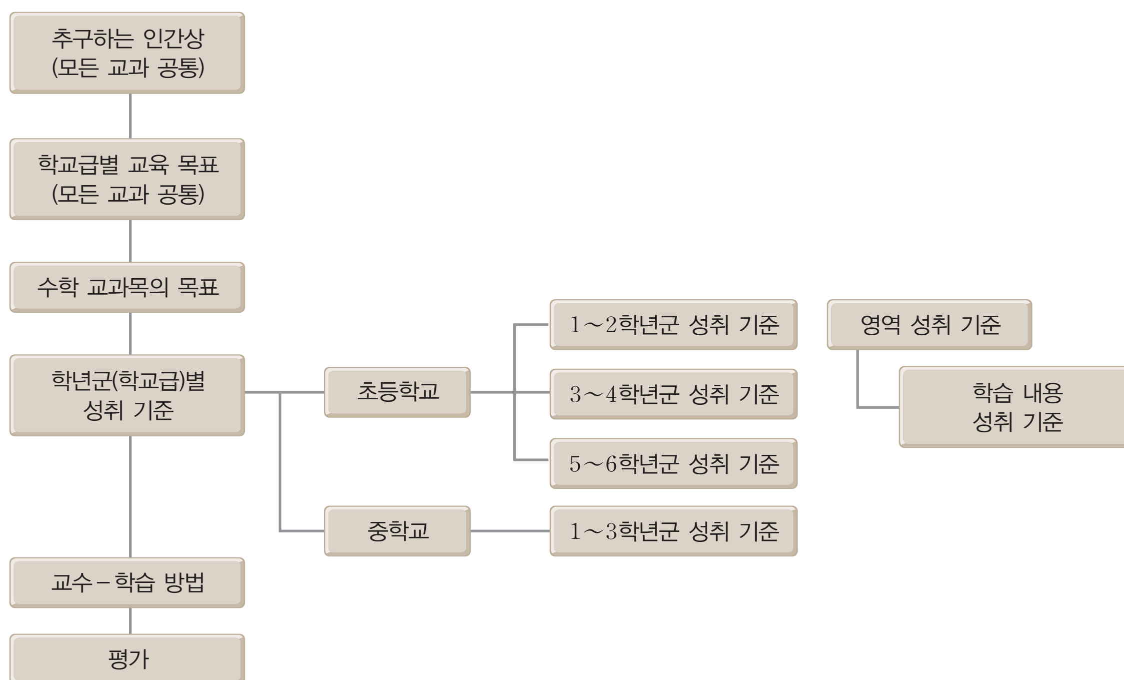
가. 교과목의 구성 및 문서 체제

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 교과목은 공통 교육과정과 선택 교육과정으로 구성되어 있으며, 공통 교육과정에는 초등학교 1학년에서부터 중학교 3학년까지 다뤄지는 「수학」 교과목이 해당되며, 선택 교육과정에는 고등학교 1학년에서 3학년까지 다뤄지는 9개 교과목이 포함되어 있다. 선택 교육과정은 '기본 과목', '일반 과목', '심화 과목'으로 구성되어 있으며, 일반 과목은 모두 5단위의 6개 선택 과목으로 「수학 Ⅰ」, 「수학 Ⅱ」, 「확률과 통계」, 「미적분 Ⅰ」, 「미적분 Ⅱ」, 「기하와 벡터」로 구성되어 있다. 그 밖에 기본 과목에는 「기초 수학」, 심화 과목에는 「고급 수학 Ⅰ」과 「고급 수학 Ⅱ」가 포함된다.

공통 교육과정		
1. 수학		
선택 교육과정		
〈기본 과목〉	〈일반 과목〉	〈심화 과목〉
1. 기초 수학	1. 수학 Ⅰ 2. 수학 Ⅱ 3. 확률과 통계 4. 미적분 Ⅰ 5. 미적분 Ⅱ 6. 기하와 벡터	1. 고급 수학 Ⅰ 2. 고급 수학 Ⅱ

[그림 Ⅱ-1] 수학과 교육과정의 교과목 구성

공통 교육과정 기간에 다뤄지는 수학 교과목의 문서 체제를 예로 들어 도식화하면 다음과 같으며, 선택 교육과정 기간의 9개 교과목의 문서 체제도 이와 동일한 방식으로 구성되어 있다. 여기서 각 교과목의 '3. 목표'는 2007 개정 교육과정의 '1. 성격'과 '2. 목표'의 두 부문의 진술을 통합하여 진술하고 있다. 특히 「수학」 교과목의 목표의 경우, 예전에 분리하여 제시되어 있던 초등학교와 중학교의 교육 목표가 통합, 진술되었다.



[그림 Ⅱ-2] 수학 교과목의 목표 및 성취 기준

나. 영역 구분의 변경

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 제7차 개정의 것과 마찬가지로, 학교급별 특성을 감안하여 초등학교와 중학교 각각의 내용 영역을 구분하였으며, 초등학교의 경우 '규칙성과 문제 해결' 영역을 '규칙성'으로 변경하였다. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 모든 학교급 및 모든 수학 교과목에 걸쳐 수학적 과정의 요소로서 문제 해결 활동을 전 영역 및 세부 내용에 걸쳐 적극 반영하도록 강조하고 있기 때문이다.

2007 개정 교육과정			
초등학교	수와 연산	중·고등학교	수와 연산
	도형		문자와 식
	측정		함수
	확률과 통계		확률과 통계
	규칙성과 문제 해결		기하

2009 개정 교육과정			
초등학교	수와 연산	중학교	수와 연산
	도형		문자와 식
	측정		함수
	규칙성		확률과 통계
	확률과 통계		기하

[그림 Ⅱ-3] 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 영역명

03 학교급별 내용 변화

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 학교급별, 학년군별 내용의 변화는 기본적으로 학교 현장에서의 창의성 활동을 실제적이고 효율적으로 실행하기 위한 것으로, 학습 내용의 적정화 및 학년별 내용 분량이 조정되었다. 수학과 교육과정의 총 10개 교과목에 대한 주요 변화 내용을 학교급별로 살펴보면 다음과 같다.

가. 초등학교

(1) 수와 연산

초등학교의 수와 연산 영역에서 가장 큰 변화로는 자연수 및 분수의 지도 시기를 재조정하고, 계산 연습을 통한 단순한 연산 기능 신장이 아니라 연산 감각 및 양적 추론 능력을 강화한 점을 들 수 있다. 또한 사칙연산의 계산 결과를 어림한 후 어림한 값을 확인하거나 소수의 복잡한 계산에 있어서 계산기를 도입하여 활용할 수 있게 함으로써, 지나친 계산 연습에서 기인하는 학습 부담을 경감하고자 하였다.

(2) 도형

2007 개정 교육과정에서 평면도형의 각 구성 요소에 대한 학습 후 도형의 언어적이고 명시적인 정의를 통해서 도형 개념을 도입하는 방식을 대신하여, 2009 개정 교육과정에서는 도형의 모양 인식 및 분류 활동을 토대로 하여 도형 및 그 구성 요소에 대한 직관적인 이해와 더불어 이름을 먼저 학습한 후 점차 분석적, 명시적으로 도형의 개념 및 성질을 학습할 기회를 제공하였다. 한편 2007 개정 교육과정에서 분산되어 지도되었던 각, 삼각형, 사각형 관련 단원의 내용들을 각각 통합적으로 취급함으로써 학생들의 개념 구조의 체계적 형성을 돕고자 하였다. 또 초등학생의 인지 수준에 적합하지 않은 내용으로 간주되는 사각형의 포함 관계나 수학 학습의 계열상 초등 수학에서 다루는 것이 적합하지 않은 선대칭 위치에 있는 도형과 점대칭 위치에 있는 도형 및 회전체를 삭제하였다.

(3) 측정

측정 영역은 실생활과 밀접하게 관련되어 있으므로, 실생활과 관련지어 측정의 필요성을 인식하게 하고 측정 및 어림 활동을 통하여 양감을 기르는 데 중점을 두었다. 측정 영역에서의 계산은 측정 결과 간의 단순 연산이나 단위 환산은 축소하고, 측정의 관점에 중점을 두도록 하였다. 길이, 무게, 들이, 넓이의 양감을 기르는 데 중점을 두고, 측정 영역에서 합과 차를 계산하거나 단순한 단위 환산 연습은 약화하였으며, 들이 및 무게의 덧셈과 뺄셈은 실생활 문제 상황을 통하여 다루도록 하였다. 또한 부피의 양감을 강조하고 부피의 단위 사이의 환산이나 부피와 들이의 단위 환산은 삭제하여 학습량을 감축하였다.

(4) 규칙성

2007 개정 교육과정에서 '규칙성과 문제 해결' 영역은 주로 문제 해결 방법, 규칙 찾기, 비와 비율, 비례 등을 포괄하였다. 2009 개정 교육과정에서는 '문제 해결'이 다른 영역의 내용적 성격과 달리 과정적 성격을 띠고 있으며 수학 교과 전 영역에서 고루 지도되어야 한다는 취지에서 '문제 해결' 부분은 전 영역으로 재편하고, 영역명은 '규칙성'으로 설정하였다. 규칙성 영역의 주요 변화로는 각 학년에 분산되어 있던 규칙 찾기 활동을 통합하고 탐구 활동 및 놀이를 활용하고자 하였다. 비율 중 할, 푼, 리나 연비는 그 중요도 및 쓰임새를 재고하여 삭제하였으며, 방정식은 중학교의 학습 내용과 중복하여 다루어지고 있으므로 초등학교에서는 삭제하고 중학교의 '일차방정식'으로 이동 통합함으로써 학습량을 감축하였다.

(5) 확률과 통계

확률과 통계 영역에서의 가장 큰 변화는 줄기와 잎 그림, 경우의 수와 확률을 중학교로 이동 통합하고, 초등학교에 가능성의 개념을 도입한 것이다. 줄기와 잎 그림은 학습량 감축 및 학문 내에서의 개념 간 관련성을 고려하여 중학교의 통계 영역과 의미 있게 연결되도록 상향 이동하였다. 또한 경우의 수와 확률은 초등학교와 중학교에서 내용 중복 및 학습량 감축의 취지에서 중학교로 이동 통합하였고, 확률 개념의 계열적 구성이라는 측면에서 가능성이라는 개념을 초등학교 5~6학년군에 도입하였다.

이상으로 초등학교에서의 주요 변화 내용을 정리하면 다음과 같다.

- 시간의 덧셈과 뺄셈 약화 (3~4학년군)
- 사각형의 포함 관계 삭제 (3~4학년군)
- 할, 푼, 리 삭제 (5~6학년군)
- 등식의 성질 삭제 (5~6학년군), 중학교로 상향 이동
- 방정식 삭제 (5~6학년군), 중학교로 상향 이동
- 연비의 삭제 (5~6학년군)
- 겉넓이와 부피 통합 및 부피와 들이 사이의 관계 삭제 (5~6학년군)
- 선대칭 위치에 있는 도형과 점대칭 위치에 있는 도형 삭제 (5~6학년군)
- 회전체 삭제 (5~6학년군), 중학교로 상향 이동
- 가능성 도입 및 확률 삭제 (5~6학년군), 중학교로 상향 이동
- 줄기와 잎 그림 삭제 (5~6학년군), 중학교로 상향 이동

나. 중학교

(1) 수와 연산

수는 수학에서 다루는 대상 중에서 가장 기본이 되는 개념으로서 수의 개념과 연산에 대한 이해는 실생활뿐 아니라 다른 교과나 수학의 다른 영역을 학습하는 데 필수적이다. 따라서 수와 연산 영역은 수의 개념과 연산에 대한 이해를 높이고 이후의 학습과 연계될 수 있는 필수적인 요소만을 선정하였다. 또한 집합은 고등학교로 상향 이동하였고, 근삿값은 삭제하였다.

(2) 문자와 식

문자는 생활 주변이나 자연 및 사회 현상을 수학적으로 간단하게 표현하고 의사소통을 원활히 할 수 있게 해준다. 문자와 식 영역에서는 학생들이 자연스럽게 문자를 사용할 수 있도록 문자와 식을 실생활 문제 해결의 맥

락에서 다루게 하고, 수학이 현실 세계의 상황과 밀접한 관련이 있다는 것을 학생들에게 인식시켜야 한다. 이를 위해 방정식, 부등식과 그의 활용은 독립적인 중영역이 아닌 하나의 영역에서 통합하여 학습하도록 구성하였다. 또한 방정식과 부등식의 학습에 있어서 용어 사용에 대한 학습자의 부담을 고려하여 필요 이상의 용어 정의를 제한하였다.

⑶ 함수

2007 개정 교육과정에서는 제7차 교육과정에서 정비례와 반비례를 통해 함수 개념을 도입하면서 발생했던 문제점을 보완하기 위해, 정비례와 반비례를 초등학교 6학년으로 이동시키고 함수 개념을 '한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계'로 도입하고, 실생활을 활용하여 함수 개념의 효용성을 알게 하는 것이 필요하다고 하였다(교육과학기술부, 2007). 이런 점에서 볼 때 중학교 수준의 함수 영역은 현실 세계의 상황을 이해하는 도구로서의 함수 개념에 초점을 맞추고, 고등학교 함수에서 여러 영역을 통합하는 아이디어로서 대응의 관점에서 정의된 형식화된 함수 개념으로 확장될 수 있는 기반이 되도록 하는 것이 바람직하다. 이에 2009 개정 교육과정에서는 함수 개념의 도입 방법의 변화를 도모하고, 정의역, 공역, 치역 등의 용어를 삭제하였다.

⑷ 확률과 통계

확률과 통계는 중학교 수학에서 실생활과 관련성이 매우 깊은 영역이다. 중학교에서는 자료의 정리와 표, 그래프의 해석, 통계적 확률과 수학적 확률의 관계, 확률의 계산, 대푯값과 산포도의 내용이 다루어진다. 본 개정안에서는 학생들이 통계를 학습함으로써 분석적이고 비판적인 사고를 도모할 수 있도록 내용의 변화는 최소화하면서, 교수 · 학습 방법의 변화를 도모하였다. 2007 개정 교육과정과 달라진 내용은 학습량 감축을 위해 '누적도수의 분포'를 삭제하고, 탐색적 자료 분석의 한 방법인 '줄기와 잎 그림'을 도수분포와 그래프 학습 내용에 추가한 것이다.

⑸ 기하

수학 교육에서 증명은 전통적으로 학생들에게 꼭 가르쳐야 하는 주요 대상으로 인식되어 왔다(NCTM, 2000). 그러나 중학교 수학에서의 증명 교육은 기대하는 만큼의 효과를 거두지 못하고 있음이 알려져 있다. 그 이유는 학생들이 기하에서 다루는 개념에 대한 지식이 부족한 탓도 있겠지만, 공리 체계 내에서 논리 규칙에 따라 명제들을 체계적으로 연결시키는 데 어려움을 느끼기 때문이다.

2009 개정 교육과정에서 기하 영역은 학생들이 도형을 탐구하여 기하학적 성질을 이해하고 이를 통해 추론 능력을 신장시키는 것을 목표로 한다. 또한 기하학적 성질을 이해하고 그 지식을 습득하는 방법에 있어서 학생 활동을 중시하고 증명 대신 추측 활동을 강조한다. 이를 위하여 다음 표에서와 같이 2009 개정 교육과정에서는 '증명할 수 있다' 대신 '이해하고 설명할 수 있다'로 제시하였다.

〈표 Ⅱ-2〉 '추측과 정당화' 강조에 대한 내용 비교

2007 개정 교육과정	2009 개정 교육과정
5 삼각형과 사각형의 성질(2학년) ① 명제의 뜻과 증명의 의미를 이해한다. ② 삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형의 성질을 증명할 수 있다.	5 삼각형과 사각형의 성질 ① 이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다. ② 삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다. ③ 사각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.

2009 개정 교육과정에 제시한 '이해하고 설명할 수 있다'는 '정당화(justification)'를 의미하는데, 이는 자신의 주장 또는 믿음을 타인에게 이해시키려는 시도를 말한다. 이 시도는 일정 수준의 객관성을 담보할 수 있어야 한다. 인식론의 관점에서 정당화는 실험에 의한 정당화, 증거에 의한 정당화, 그리고 논리에 의한 수학적 증명 등으로 대변할 수 있다(http://www.wikipedia.org). 이때 수학적 증명은 논리적 연역법을 의미한다. 기하 교육에서의 증명은 기하 지식을 증거로 삼으며 논리적 형식을 갖춘 정당화를 의미한다(신이섭 외, 2011).

정당화를 유도하는 교수 방법은 다양한 형태로 나타날 수 있다. 예를 들면 학생들의 이해 수준에 합당한 간단한 논리 증명(연역 추론), 계산에 입각한 문제 해결(계산 증명), 그리고 귀납 추론 등이 포함된다. 정당화 교육을 중심으로 한 기하 교육은 기본적으로 학생의 활동에 의존한다. 형식적이고 엄밀한 증명 대신 추측과 정당화 활동을 강조하여, 증명을 하기 위해 익숙해져야 하는 용어와 기호의 사용이나 형식 논리 규칙의 이용에서 생기는 어려움을 줄이고 학생의 기하 지식에 기초한 추론 활동을 강화하는 것이다.

이와 같이 기하 교육에서 객관적 사실의 확인 과정인 논리 증명을 정당화 수준으로 확대함으로써, 논리 형식만을 다루는 것이 아니라 학생들의 인지 수준과 흥미를 고려한 추론 기회를 폭넓게 제공하려 하였다. 이러한 활동은 기하에 대한 이해와 반성적 사고뿐만 아니라 의사소통 능력의 향상에도 도움이 될 것이다.

한마디로 중학교의 기하 영역에서는 학생 활동이 중심이 되는 학생 주도적 수업을 강조하며 형식적 증명보다는 학생의 이해 수준에 입각한 '정당화' 수준의 교육을 지향하고자 하였다. 또한 2007 개정 교육과정의 단발성 주제와 상대적으로 의미가 적은 용어들을 삭제하고, '원과 직선', '원주각' 두 영역을 원의 성질로 묶어 하나의 영역으로 내용을 축소시켜 다루는 등, 전체적으로 학습량을 경감하였다.

이상으로 중학교에서의 주요 변화 내용을 정리하면 다음과 같다.

- 집합 삭제
- 근삿값 삭제
- 십진법과 이진법 삭제
- 수학 개념과 실생활 활용의 통합
- 방정식 관련 용어 약화
- 함수 개념 도입 방법의 변화
- 정의역, 공역, 치역 용어 삭제
- 통계 교수 · 학습 방법의 변화
- 누적도수의 분포 삭제
- 줄기와 잎 그림 추가
- 정당화에 의한 기하 교육 강조
- 작도와 합동, 평면도형의 성질 내용 축소
- 원의 성질 내용 축소

다. 고등학교

(1) 일반 과목

고등학교의 일반 과목에 해당하는 6개 교과목의 주요 변화 내용을 개략적으로 살펴보면 다음과 같다.

■ 수학 I

「수학 I」은 국민 공통 기본 교육 기간인 중학교 3학년까지의 「수학」을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 고등학교에서 개설되는 선택 과목 중에서 가장 기초가 되는 과목이다.

「수학 I」의 내용은 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 1년 동안 필수로 이수하는 과목인 [수학]의 내용 중 '수와 연산', '문자와 식', '기하' 영역의 일부를 재구성한 것으로 크게 '다항식', '방정식과 부등식', '도형의 방정식'의 3개 영역으로 구성된다. '다항식' 영역에서는 다항식의 연산, 나머지정리, 인수분해를, '방정식과 부등식' 영역에서는 복소수와 이차방정식, 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식, 여러 가지 부등식을 다룬다.

「수학 I」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교

하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 실수 삭제
- 복소수와 이차방정식의 연계 강화
- 다항식의 약수와 배수 약화
- 이차방정식, 이차부등식, 이차함수의 통합 및 연계성 강화

■ 수학II

「수학Ⅱ」는 국민 공통 기본 교육 기간인 중학교 3학년까지의 「수학」과 「수학Ⅰ」을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 고등학교에서 개설되는 선택 과목 중에서 「수학Ⅰ」과 함께 기초가 되는 과목이다.

「수학Ⅱ」의 내용은 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 1년 동안 필수로 이수하는 과목인 [수학]의 내용 중 '집합과 명제'와 '함수' 영역의 내용, [수학Ⅰ]의 내용 중 '수열' 영역과 '지수함수와 로그함수'의 내용 중 일부를 재구성한 것으로 크게 '집합과 명제', '함수', '수열', '지수와 로그'의 4개 영역으로 구성된다. '집합과 명제' 영역에서 집합, 명제를, '함수' 영역에서 함수, 유리함수와 무리함수를, '수열' 영역에서 등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법을, '지수와 로그' 영역에서 지수, 로그를 다룬다.

「수학Ⅱ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 집합 내용 통합
- 명제 내용 보완 및 증명 부분 강화
- 함수 영역의 내용 약화
- 수열의 약화 및 이동
- 지수와 로그 내용 약화 및 이동

■ 확률과 통계

「확률과 통계」는 「수학Ⅰ」과 「수학Ⅱ」를 이수한 후 또는 「미적분Ⅰ」까지 이수한 학생이 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문 과학, 사회 과학 또는 자연 과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다.

「확률과 통계」는 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 필수로 이수하는 고등학교 [수학]의 '확률과 통계' 영역, 선택 과목인 [미적분과 통계 기본]과 [적분과 통계]의 '확률', '통계' 영역, 그리고 [적분과 통계]의 '순열과 조합' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '순열과 조합', '확률', '통계'의 3개 영역으로 구성된다. '순열과 조합' 영역에서 경우의 수, 순열과 조합, 분할, 이항정리를, '확률' 영역에서 확률의 뜻과 활용, 조건부확률을 '통계' 영역에서 확률분포, 통계적 추정을 다룬다.

「확률과 통계」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 순열과 조합 관련 내용 통합 및 추가
- 연속확률변수의 평균과 표준편차 삭제
- 공학적 도구의 활용 강조

■ 미적분 I

「미적분Ⅰ」은 「수학Ⅰ」과 「수학Ⅱ」를 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문 과학, 사회 과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다.

「미적분Ⅰ」은 2007 개정 교육과정에서 [수학Ⅰ]의 '수열의 극한' 영역과 [미적분과 통계 기본]의 '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법' 영역의 내용을 기본으로 하고 [수학Ⅱ]의 '미분법' 영역의 내용 중 '롤의 정리, 평균값 정리의 이해와 활용'에 대한 내용을 추가하여 '수열의 극한', '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법'의 4개의 대영역으로 구성된다. '수열의 극한' 영역에서 수열의 극한, 급수를, '함수의 극한과 연속'에서 함수의 극한, 함수의 연속을, '다항함수의 미분법' 영역에서 미분계수, 도함수, 도함수의 활용을, '다항함수의 적분법' 영역에서 부정적분, 정적분, 정적분의 활용을 다룬다.

「미적분Ⅰ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 수열의 극한의 이동 통합
- 롤의 정리와 평균값 정리의 이동
- 도함수의 활용 영역의 교수 · 학습상의 유의점 보완 및 삭제
- 용어 수정(중간값 정리를 사이값 정리로 수정)

■ 미적분 II

「미적분 Ⅱ」는 「미적분 Ⅰ」을 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다.

「미적분 Ⅱ」는 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 필수로 이수하는 [수학]의 '함수' 영역, [수학 Ⅰ]의 '지수함수와 로그함수' 영역, [수학 Ⅱ]의 '삼각함수', '함수의 극한과 연속'과 '미분법' 영역, [적분과 통계]의 '적분법' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '지수함수와 로그함수', '삼각함수', '미분법', '적분법'의 4개 영역으로 구성된다. '지수함수와 로그함수' 영역에서 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프, 지수함수와 로그함수의 미분을, '삼각함수' 영역에서 삼각함수의 뜻과 그래프, 삼각함수의 미분을, '미분법' 영역에서 여러 가지 미분법, 도함수의 활용을, '적분법' 영역에서 여러 가지 적분법, 정적분의 활용을 다룬다.

「미적분 Ⅱ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 지수함수와 로그함수 통합 및 약화
- 삼각함수 통합 및 약화
- 미분법 및 적분법의 내용 조정

■ 기하와 벡터

「기하와 벡터」는 '미분과 적분'을 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다.

「기하와 벡터」는 2007 개정 교육과정에서 [수학 Ⅱ]의 '미분법' 영역과 [적분과 통계]의 '적분법' 영역, 그리고 [기하와 벡터]의 '이차곡선', 공간도형과 공간좌표', '벡터' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '평면 곡선', '평면벡터', '공간도형과 공간벡터'의 3개 영역으로 구성된다. '평면 곡선' 영역에서 이차곡선, 평면 곡선의 접선을, '평면벡터' 영역에서 벡터의 연산, 평면벡터의 성분과 내적, 평면 운동을, '공간도형과 공간벡터' 영역에서 공간도형, 공간좌표, 공간벡터를 다룬다.

「기하와 벡터」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 미분법을 이용한 평면 곡선의 이해 강화
- 위치벡터를 이용한 평면 운동의 이해 강화

(2) 기본 및 심화 과목

고등학교의 경우에는 일반 과목에 해당하는 6개 교과목 이외에, 기본 과목인 「기초 수학」과 심화 과목인 「고급 수학 Ⅰ」, 「고급 수학 Ⅱ」가 새로 신설되었다.

「기초 수학」은 중학교 수학의 내용을 잘 이해하지 못한 학생이 일반 과목의 수학 교과를 이수하기 위해 필요한 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하기 위하여 선택할 수 있는 기본 과목이다.

「기초 수학」의 내용은 '수와 식의 계산', '방정식과 함수', '피타고라스 정리와 삼각비'로 구성된다. '수와 식의 계산' 영역에서는 수의 연산, 문자의 사용과 식의 계산, 다항식의 계산을, '방정식과 함수' 영역에서는 일차방정식과 일차함수, 이차방정식과 이차함수를, '피타고라스 정리와 삼각비' 영역에서는 피타고라스 정리, 삼각비를 다룬다.

「고급 수학 Ⅰ」과 「고급 수학 Ⅱ」는 심화 과목으로 일반 과목에서 학습한 수학의 기본 지식과 기능을 바탕으로 심화된 수준의 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하고, 수학적 사고력, 창의적 사고력, 문제 해결력 등을 신장시킬 수 있도록 하는 과목이다. 「고급 수학 Ⅰ」과 「고급 수학 Ⅱ」는 심화된 수학적 지식과 사고 방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연과학 및 공학 분야뿐만 아니라 사회과학의 학습에 기초를 제공한다.

「고급 수학 Ⅰ」의 내용은 '벡터와 행렬', '일차변환', '그래프'로 구성된다. '벡터와 행렬' 영역에서는 벡터, 행렬과 연립일차방정식을, '일차변환' 영역에서는 일차변환과 행렬, 고윳값과 행렬의 거듭제곱을, '그래프' 영역에서는 그래프의 뜻, 여러 가지 그래프, 그래프의 활용을 다룬다. 「고급 수학 Ⅱ」의 내용은 '복소수와 극좌표', '미적분의 활용', '편미분'으로 구성된다. '복소수와 극좌

표’ 영역에서는 복소수의 극형식, 극좌표와 극방정식을, ‘미적분의 활용’ 영역에서는 미분의 활용, 미분방정식, 적분의 활용을, ‘편미분’ 영역에서는 이변수함수의 뜻, 극한과 연속, 편미분, 편미분의 활용을 다룬다.

04 내용 체계

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 ‘수학’ 교과목(초등학교 1학년～중학교 3학년)의 내용 체계는 다음과 같다.

영역 \ 학교급 / 학년군	초등학교		
	1～2학년군	3～4학년군	5～6학년군
수와 연산	• 네 자리 이하의 수 • 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈	• 다섯 자리 이상의 수 • 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈 • 나눗셈 • 자연수의 혼합 계산 • 분수 • 소수 • 분수와 소수의 덧셈과 뺄셈	• 약수와 배수 • 분수의 덧셈과 뺄셈 • 분수의 곱셈과 나눗셈 • 소수의 곱셈과 나눗셈 • 분수와 소수
도형	• 입체도형의 모양 • 평면도형의 모양 • 평면도형과 그 구성 요소	• 도형의 기초 • 평면도형의 이동 • 원의 구성 요소 • 여러 가지 삼각형 • 여러 가지 사각형 • 다각형	• 합동과 대칭 • 직육면체와 정육면체 • 각기둥과 각뿔 • 원기둥과 원뿔 • 입체도형의 공간감각
측정	• 양의 비교 • 시각 읽기 • 시각과 시간 • 길이	• 시간 • 길이 • 들이 • 무게 • 각도 • 어림하기(반올림, 올림, 버림) • 수의 범위(이상, 이하, 초과, 미만)	• 평면도형의 둘레와 넓이 • 무게와 넓이의 여러 가지 단위 • 원주율과 원의 넓이 • 겉넓이와 부피
규칙성	• 규칙 찾기	• 규칙 찾기 • 규칙과 대응	• 비와 비율 • 비례식과 비례배분 • 정비례와 반비례
확률과 통계	• 분류하기 • 표 만들기 • 그래프 그리기	• 자료의 정리 • 막대그래프와 꺾은선그래프	• 가능성과 평균 • 자료의 표현 • 비율그래프(띠그래프, 원그래프)

영역 \ 학교급 / 학년군	중학교		
	1~3학년군		
수와 연산	• 소인수분해 • 최대공약수, 최소공배수 • 정수와 유리수의 개념, 대소 관계, 사칙계산	• 순환소수 • 유리수와 순환소수의 관계	• 제곱근의 뜻과 성질 • 무리수 • 실수의 대소 관계 • 근호를 포함한 식의 사칙계산
문자와 식	• 문자의 사용 • 식의 값 • 일차식의 덧셈과 뺄셈 • 일차방정식	• 지수법칙 • 다항식의 덧셈과 뺄셈 • 다항식의 곱셈과 곱셈 공식 • 다항식의 나눗셈 • 등식의 변형 • 연립일차방정식 • 부등식의 성질과 일차부등식 • 연립일차부등식	• 인수분해 • 이차방정식
함수	• 함수의 개념 • 순서쌍과 좌표 • 함수의 그래프	• 일차함수의 의미와 그래프 • 일차함수의 활용 • 일차함수와 일차방정식의 관계	• 이차함수의 의미 • 이차함수의 그래프의 성질
확률과 통계	• 줄기와 잎 그림, 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형 • 도수분포표에서의 평균 • 상대도수의 분포	• 경우의 수 • 확률의 뜻과 기본 성질 • 확률의 계산	• 중앙값, 최빈값, 평균 • 분산, 표준편차
기하	• 점, 선, 면, 각 • 점, 직선, 평면 사이의 위치 관계 • 평행선의 성질 • 삼각형의 작도 • 삼각형의 합동조건 • 다각형의 성질 • 부채꼴에서 중심각과 호의 관계 • 부채꼴에서 호의 길이와 넓이 • 다면체, 회전체의 성질 • 입체도형의 겉넓이와 부피	• 이등변삼각형의 성질 • 삼각형의 외심, 내심 • 사각형의 성질 • 닮은 도형의 성질 • 삼각형의 닮음조건 • 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비 • 닮은 도형의 성질 활용	• 피타고라스 정리 • 삼각비 • 원의 현, 접선에 대한 성질 • 원주각의 성질

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 '수학' 교과목 이외에 고등학교 선택 교과목의 내용 체계는 다음과 같다.

〈기본 과목〉

■ 기초 수학

영역	내용
수와 식의 계산	• 수의 연산 • 문자의 사용과 식의 계산 • 다항식의 계산
방정식과 함수	• 일차방정식과 일차함수 • 이차방정식과 이차함수
피타고라스 정리와 삼각비	• 피타고라스 정리 • 삼각비

〈일반 과목〉

■ 수학 I

영역	내용
다항식	• 다항식의 연산 • 나머지정리 • 인수분해
방정식과 부등식	• 복소수와 이차방정식 • 이차방정식과 이차함수 • 여러 가지 방정식 • 여러 가지 부등식
도형의 방정식	• 평면좌표 • 직선의 방정식 • 원의 방정식 • 도형의 이동 • 부등식의 영역

■ 수학 II

영역	내용
집합과 명제	• 집합 • 명제
함수	• 함수 • 유리함수와 무리함수
수열	• 등차수열과 등비수열 • 수열의 합 • 수학적 귀납법
지수와 로그	• 지수 • 로그

■ 미적분 I

영역	내용
수열의 극한	• 수열의 극한 • 급수
함수의 극한과 연속	• 함수의 극한 • 함수의 연속
다항함수의 미분법	• 미분계수 • 도함수 • 도함수의 활용
다항함수의 적분법	• 부정적분 • 정적분 • 정적분의 활용

■ 미적분 II

영역	내용
지수함수와 로그함수	• 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프 • 지수함수와 로그함수의 미분
삼각함수	• 삼각함수의 뜻과 그래프 • 삼각함수의 미분
미분법	• 여러 가지 미분법 • 도함수의 활용
적분법	• 여러 가지 적분법 • 정적분의 활용

■ 확률과 통계

영역	내용
순열과 조합	• 경우의 수 • 순열과 조합 • 분할 • 이항정리
확률	• 확률의 뜻과 활용 • 조건부확률
통계	• 확률분포 • 통계적 추정

■ 기하와 벡터

영역	내용
평면 곡선	• 이차곡선 • 평면 곡선의 접선
평면벡터	• 벡터의 연산 • 평면벡터의 성분과 내적 • 평면 운동
공간도형과 공간벡터	• 공간도형 • 공간좌표 • 공간 벡터

〈심화 과목〉

■ 고급 수학 I

영역	내용
벡터와 행렬	• 벡터 • 행렬과 연립일차방정식
일차변환	• 일차변환과 행렬 • 고윳값과 행렬의 거듭제곱
그래프	• 그래프의 뜻 • 여러 가지 그래프 • 그래프의 활용

■ 고급 수학 II

영역	내용
복소수와 극좌표	• 복소수의 극형식 • 극좌표와 극방정식
미적분의 활용	• 미분의 활용 • 미분방정식 • 적분의 활용
편미분	• 이변수함수의 뜻 • 극한과 연속 • 편미분 • 편미분의 활용

III. 수학 교과서의 개발 동향

01 구성주의와 수학 교과서

구성주의의 수학 교육관은 '학생에 의한 수학 지식의 자주적 구성'이라는 교육관에 기초한다고 볼 수 있다. 구성주의를 수학 교육의 실제에 적용하고자 하는 사람들은 수학적 지식이 외부의 강화에 의하여 학습자에게 전달될 수 있다는 견해에 동의하지 않는다. 즉, 구성주의자들은 지식이 학습자의 내면 세계에서 적절한 경험을 통해 자주적으로 구성된다고 생각하고 있으며, 이것은 곧 학생들이 수학 지식을 수동적으로 받아들임으로써 획득하는 것이 아니라 각자 능동적으로 재발명해 나감으로써 (수학 지식을) 구성하는 것을 뜻한다. 따라서 구성주의적 입장을 취하는 수학 교육 관계자들은 전통적인 방식의 수학 교육을 개선할 수 있는 하나의 대안으로서 구성주의적 수학 교육을 제안하고 있는 것이다. 특히 사회적 구성주의자들은 이제껏 전통주의자들의 주된 관심사였던 수학 지식의 실제에 대한 인식론적인 논의보다는 수학 지식에 대한 구성주의적 교수-학습의 가능성에 관심을 두었다.

'구성주의'는 그 말 자체가 광범위한 의미를 지니고 있을 뿐만 아니라 '구성'이라는 용어도 모호하기 때문에 이를 해석하는 견해가 다양하다. 그러나 현재 우리나라 수학 교과서에는 교구 및 소프트웨어 등의 조작 활동의 필요성, 개인별 능력 차를 고려한 수준별 교재의 필요성, 의사소통을 고려한 교과서 개발의 필요성 등의 반영이 절실히 요구되고 있다. 이러한 요구 사항은 조작적 구성주의자로 불리는 피아제의 발생적 인식론의 중심 아이디어인 '조작', 급진적 구성주의자들이 지식의 진리 자체에 관한 논의를 거부하고 초미의 관심사로 여긴 '개인 중심적' 구성이나 '생장 원리', 사회적 구성주의자들이 객관성을 사회성으로 대치하면서 도입한 사회적 합의의 수단인 '의사소통'을 교재 구성에 반영하자는 생각과 크게 다르지 않다.

02 구성주의적 수학과 교수-학습 원리의 반영

수학 교수-학습론의 원천으로서의 구성주의에서 수학 교육에 적용할 수 있는 유효한 교수-학습 원리는 다음과 같다.

가. 교과서에 학생 중심적 개별화의 원리 반영

구성주의의 기본적인 주장인 지식의 자주적 구성의 원리는 학생들로 하여금 갈등 국면에 대처하여 동화와 조절의 메커니즘에 따라 반영적 추상화의 과정을 통해 새로운 지식을 조정해 나가는 과정을 보여 주고 있다. 이것은 질문을 중심으로 하는 상호 작용적인 추측 및 논박에 의한 수학 교수-학습의 바탕(모델)이 된다. 구성주의는 지식의 자주적 구성을 그 근본 원리로 하고 있지만, 교수-학습의 차원에서 논의되는 지식은 '주관 독립적'인 의미에서의 객관적 지식이 아니라, 규약과 협정 등의 수단을 통하여 '공통 주관적'인 의미에서의 객관성을 가지게 된다.

따라서 수학 교육학적 구성주의에서 취하고자 하는 관점은 바로 공통 주관적인 의미에서의 객관적 지식은 학생 자신에 의해 자주적으로 구성되어야 한다는 것이며, 이러한 관점은 학생 자신에 의한 지식의 능동적인 재발명을 목표로 하는 오늘날의 수학 교육에서 요구되고 있는 관점과 일치한다고 볼 수 있다. 이를 위해서는 학생 중심적인 개별화 수업이 가능하도록 수학적 과제가 제시되어야 할 것이다. 학생이 스스로 생각하고 해결 전략을 궁리해 낼 수 있는 기회를 부여함으로써 학습자 자신이 다양한 사고를 할 수 있도록 해야 한다는 것이다.

나. 교과서에 질문 중심적 상호 작용의 원리 반영

학교 밖의 사회나 교사들은 지금까지 대체적으로 수학 지식의 가치를 인정하고 수학 교육의 당위성을 이해해 왔을지 모르지만, 아마도 학생들은 그러한 당위성을 이해하지 못하였을 것이고, 결과적으로 수학을 의미 없는 것으로 받아들일 수밖에 없었을 것이다. 그렇다면 유효한 수학 교육이 이루어지기 위해서는 학생들이 배워야 할 수학, 즉 학교 수학이 학생들에게 의미 있는 것이 되어야 함은 물론 수학 교수-학습 활동에 참여하고자 하는 학생들의 적극적 의지가 수반되어야 한다. 결국 이를 교과서에 반영하는 것은 질문 중심의 상호 학습이 일어날 수 있도록 과제를 제시하는 형태가 될 것이다. 구성주의에서는 교사와 학생 및 학생과 학생 사이의 상호 작용을 매우 중요시한다. 즉, 교사가 적절한 질문으로 학생의 응답을 유도해 냄으로써 학생들로 하여금 일련의 추측 및 논박 활동을 통해 수학 지식을 구성할 수 있도록 교수-학습 환경을 설정할 것을 요구하고 있다. 따라서 의미 지향적인 활동 수업이 이루어지도록 교과서가 구성되어야 할 것이다.

다. 교과서에 의미 지향적 활동의 원리 반영

위에서 살펴본 수학 지식의 자주적인 구성이 교수-학습에서의 학생의 의미 지향적 활동이나 교사의 적절한 질문만으로 가능한 것은 아니다. 학생에 의한 지식의 자주적 구성은 지식 구성을 하는 학습자 자신에 의해 내면적으로 이루어지는 자주적 활동 없이는 불가능하다. 다시 말해 효율적인 수학 교수-학습을 위해서는 학습자의 내면화된 자주적 활동이 학생의 교수-학습 활동에의 참여 의지 및 교사의 적절한 질문과 더불어 반드시 필요하다.

이때 이 내면화된 자주적 활동의 메커니즘을 구성주의가 설명해 주고 있는바, 이것이 바로 반영적 추상화이다. 그렇다면 학습자가 반영적 추상화의 과정을 경험할 수 있도록 교재가 구성되어야 함은 물론이다. 부연 설명하면, 교과서는 여러 가지 활동을 통하여 익힌 의미 있는 경험을 반성하여 자기 자신의 지식을 구성할 수 있도록 구현되어야 한다는 것이다.

03 구성주의적 관점에서의 교과서 개발 방향

위에서 살펴본 구성주의적 관점에 기초한 바람직한 수학 교과서를 구현하기 위하여 고려되어야 할 사항은 다음과 같다.

가. 교과서 저자의 철학

교과서에는 교과서 저자 나름대로의 철학이 배어 있어야 한다. 지금까지의 교과서에 제시된 교육과정상의 내용들은 누구나 합의할 수 있는 객관적이고 보편적인 것만을 다루도록 하는 것이 불문율이었다. 그러나 이제는 절대적 진리처럼 내용이 전개되던 교과서의 역할과 권위보다 학생들의 주체적인 사고의 참여를 촉발시킬 수 있는 '저자'의 역할과 권위를 우위에 두어야 할 것이다. 이때 교과서 저자는 자신이 왜 그러한 주제에 관심을 가지는지, 그것이 왜 중요한 것인지를 드러내고 어떻게 그 주제를 전개해 나아가는지 등에 관한 자신의 철학과 견해를 피력하고, 또 다른 견해들과의 차이를 드러내어 맥락화시킬 수 있도록 한다.

나. 안내형 교과서

전통주의적 입장에서의 교과서 방식은 학습 목표에서 추출된 세부적 요소들을 논리 정연하게 제시하는 '제시형 교과서'라고 할 수 있으며, 구성주의적 관점에서 보는 교과서는 교과서에 제시된 내용들에 학습자와의 실질적인 상호 작용을 통해서 그 의미가 발현될 수 있도록 소재적 가치를 부여하는 '안내형 교과서'라고 할 수 있다. 즉, 안내형 교과서는 학습하기를 기대하는 내용들을 직접 제시하는 대신 학습자로 하여금 구조적 변화를 경험하도록 안내하는 역할을 하는 내용으로 교과서를 구성하는 방식

을 취한다고 할 수 있다. 안내형 교과서는 개인적인 관심, 해석, 활동 등 학습자의 주체적인 역할에 큰 비중을 두고 학습자의 적극적이고 당사자적인 관여를 요청하고 있다.

이홍우(1997)는 "교과를 가르치되 학생의 경험과 의미 있게 관련되도록 가르쳐야 한다."라고 주장하면서 학생들은 자신이 배우는 다른 내용들을 쉽게 이해하고 기억할 수 있을 뿐만 아니라 학교에서 배운 것을 다른 상황에 쉽게 적용할 수 있어야 한다고 하였다. 그러기 위해서는 날로 팽창하는 지식을 모두 가르치려고 할 것이 아니라, 그중에서 기본 또는 핵심이 되는 것만을 골라 가르쳐야 하며, 이와 같이 기본이나 핵심이 되는 것을 '지식의 구조'라고 명명하였다. 즉, 지식의 구조를 알면 팽창하는 모든 지식을 하나씩 따로따로 배우지 않더라도 그 기본적인 것에 비추어서 나머지를 쉽게 이해할 수 있다고 본 것이다.

다. 관계적 이해를 도모하는 교과서

기존의 교과서는 지극히 제한된 지면에 방대한 내용을 소개해야 하기 때문에 가능한 한 핵심적이고 확실한 원리나 개념들을 중심으로 간결하고 함축적인 방식으로 제시하고 있다. 이와 같이 주요 주제나 개념들을 피상적으로 제시하는 방식은 교사와 학생들로 하여금 '관계적 이해'를 도모하기보다는 수학적 언어와 기호를 이용하여 외우고 재생해 내는 데 급급하게 하는 '도구적 지식'을 가지도록 한다.

도구적 수학은 보통 이해하기가 더 쉬우며, 보다 적은 지식이 필요하기 때문에 학습 결과에 대한 보상이 즉각적이고 명백하다. 그러나 이 방식은 수학의 전체 영역에 서로 연결되는 기초적인 개념을 교수-학습하기보다는 서로 분리하여 각각의 주제를 교수-학습하는 것이기 때문에 기대하는 학습이 이루어진다고 보기 어려울 것이다.

반면 관계적 이해를 통한 학습은 마치 나무가 영양분을 찾아서 뿌리를 뻗어 나가거나 동물이 먹이를 찾아 새로운 지역을 탐험하는 것과 같이 능동적으로 새로운 자료를 찾고 새로운 분야를 탐구하는 것에 비유될 수 있다. 그러므로 관계적 이해를 촉구하기 위해서는, 즉 핵심적인 원리나 개념을 습득하게 하기 위해서는 그러한 내용을 얻을 수 있도록 해당 절차를 안내(유도)하는 방식으로 교과서를 구성하도록 한다.

라. 질문 중심의 개념 전개

기존의 교과서는 수학적 지식을 대부분 완성된 형태로 제시하는 하향식 전개 방식을 택하고 있다. 또한 단원의 마무리 단계는 기본 문제, 연습 문제, 종합 문제, 심화 문제 등으로 구성되어 있다. 따라서 계산이나 풀이 형식의 정착을 위해 학생들이 풀어야 할 문제들이 교과서에 산적해 있다. 이런 상황에서 학생들은 문제 풀이를 위한 반복 훈련을 하는 데 주력하게 되고, 교사 역시 이러한 기능을 정착시키기 위한 내용 전개로 수업을 이끌어 가는 경향이 있다.

이를 개선하기 위해서는 현재 교과서에 수록되어 있는 반복 연습형의 문제들을 줄이고 그 대신 수학적 개념과 문제 해결의 절차를 이해시키는 데 주력함으로써, 학생들에게 '수학을 한다.'는 것이 이미 배운 개념이나 공식, 절차를 바로 적용해서 연습 문제를 푸는 것이 전부가 아니라는 사실을 인식시켜야 할 것이다.

마. 수학적 유용성 강조

수학은 실제로 모든 학문의 기초로서 우리의 일상생활뿐만 아니라 공학, 의학, 경제, 사회, 문화 등 여타 분야에 지대한 영향을 미치고 있음에도 불구하고 이에 대한 인식이 부족하다. 지금까지의 교과서의 내용 및 그 전개 방식을 살펴보면 교사나 학습자로 하여금 여러 단원의 내용들이 서로 독립된 것이라고 오판하기 쉽게 되어 있다. 따라서 앞으로의 교수-학습 자료에는 단원 간의 내용 연계성을 강조함으로써 학생들 각자의 스키마를 구성하는 데 도움이 되도록 해야 할 것이다. 특히 교과서에

수학의 활용성에 대한 구체적인 내용을 단원별로 또는 전체적으로 기술하고, 과학이나 미술 등 다른 교과목과의 연결성을 찾는 내용도 포함시켜 학생들이 수학의 중요성을 알도록 해야 할 것이다.

바. 다양한 교구 및 도구 활용

수학 수업에서의 교구 사용은 추상적인 수학적 개념을 구체물로 모델링한다는 데 가장 큰 의의가 있으며 이를 통해서 학생들은 수학적 절차나 공식보다는 그 이면에 내재되어 있는 의미를 알 수 있게 된다. 또 교구는 학생들이 직접 만지면서 다루기 때문에 학생 중심적인 개별화 수업을 가능하게 할 뿐만 아니라 2~4명의 소집단 학습을 통하여 집단별 그리고 전체 토론이 이루어짐으로써 반영적 추상화를 경험할 수 있게 한다. 우리나라의 수학 교육과정은 컴퓨터와 계산기의 사용을 교사나 학교의 재량에 따라 사용하도록 권장하고 있다. 하지만 실제 학교 현장에서는 이들을 수업에 언제, 어떻게 활용해야 하는지를 잘 모르고 있는 실정이다. 그러므로 교수-학습 자료에 컴퓨터나 계산기 등의 활용 지침 및 방안에 대한 자세한 설명이 수록되어야 할 것이다.

04 수준별 수업의 운영

가. 수준별 수업의 운영 방식

수학과의 경우 수준별 수업은 1996년부터 현장에서 서서히 실시되기 시작하여 제7차 단계형 수준별 교육과정의 취지에 따라 더욱 활성화되었다. 수준별 수업과 예전의 단계형 수준별 교육과정의 운영은 그 접근 방법이 다르다고 할 수 있겠으나, 학생의 수준에 적합한 교육 내용을 다루고자 하는 점에서 기본 취지는 동일한 것으로 볼 수 있다.

2009 개정 교육과정에 따른 교과서는 기본 과정과 심화 과정의 학습 내용이 명료히 구분되어 제시되어 있지 않지만, 수준별로 개념 설명의 접근 방법을 차별화하고 해당 문제들의 난이도를 조정한다면 분단 수업이나 이동 수업을 진행하기가 용이할 것이다. 이렇듯 수준별 수업은 전통적으로 해 왔던 일제 수업의 폐단을 줄이고, 교사들의 다양한 교수-학습 자료 개발을 활성화시키며 학습자 주도의 학습의 중요성을 인식시키는 등 현장 교육을 긍정적으로 이끌 것이다.

이렇듯 수준별 수업은 학생의 성취 수준에 따라 수준별로 반을 편성하여 동일한 학습 진도 내에서 학습 심도를 달리하여 지도하는 '동진도-이심도' 방식을 취하는 것이 바람직하다. 이에 따라 수준별로 적합한 수업을 진행하기 위해서는 기본적으로 교육과정에 제시된 기본 학습 내용을 모든 수준의 학생들이 다루도록 하되, 각 수준별로 다루어야 할 학습 내용의 정도와 방법을 차별화하도록 한다. 〈표 Ⅲ-1〉 참조 이때 한 차시의 수업 내용을 기준으로 하거나 또는 교과서의 한 소단원을 기준으로 하여도 무방하다.

〈표 Ⅲ-1〉 수준별 수업 운영 방식

반 수준	수준별 수업 과정		
상	내용 수준	기본 내용	심화 내용
	수업 방식	개념 이해 → 단순 / 발전 과제 해결	발전 과제 해결
중	내용 수준	기본 내용	심화 내용
	수업 방식	개념 이해 → 단순 / 발전 과제 해결	단순 과제 해결
하	내용 수준	기본 내용	
	수업 방식	선수 학습 내용의 이해 → 개념 이해 → 단순 과제 해결	

나. 수준별 수업의 효율적 운영 방안

수준별 수업을 효율적으로 운영하기 위해서는 다음 사항에 유의해야 할 것이다.

(1) 학습자의 눈높이

개인차에 따른 학습 능력을 고려하여 수준별로 분단이나 학급을 편성하여 적절히 운영하여야 한다. 즉, 수준별 수업 운영을 위한 노력으로 우선 각 수준에 따라 수업 내용, 수업 진도 등이 적절한지 검토하여야 한다. 이때 무엇보다도 중요한 것은 수준별 수업을 위한 수업 내용, 수업 진도 등이 교사 또는 수학 교육 관련 전문가의 눈높이가 아닌 '학습자'의 눈높이에 맞춰져야 한다는 점이다.

(2) 내용의 차별화

수준별 개념에 입각한 교수-학습의 차별화는 수준에 따른 '학습 내용의 차별화'를 의미하는 것으로, '학습 내용의 차별화'란 각 수준별로 다루는 학습 내용 그 자체의 차별화를 말하는 것이다. 그런데 2009 개정 교육과정에는 학생들의 수준에 상관없이 모든 학생들이 공통으로 다루어야 하는 내용이 명시되어 있다. 그러므로 '학습 내용의 차별화'란 현행 교육과정에 기초한 공통 필수 격의 학습 내용을 모든 수준의 학생들이 다루도록 하되, 수준별로 중점을 두어 다루어야 할 '주요 내용'을 차별화하는 것으로 이해할 수 있다. 따라서 '문항의 난이도'뿐만 아니라 각 수준에 적합한 '내용의 차별화'에 기초를 둔 수준별 학습 자료가 개발되어야 할 것이다.

(3) 귀납적 학습법

수학 수업을 전개해 나가는 데 있어서 일반적으로는 개념 및 원리를 설명하고 이에 따른 예제를 푼 뒤 반복 연습 문제를 푸는 '연역적 방식'을 취하고 있다. 그러나 경우에 따라서는 예 또는 예제들을 통하여 그에 부합되는 학습 내용들을 체계적으로 정리하는 '귀납적 방식'을 취함으로써 학습의 이해를 보다 높일 수도 있다. 특히 학습 결손이 명백히 드러난 학생들에게 지극히 한정된 몇몇 문제의 풀이로 학습 내용을 이해시키기는 어렵다. 그러므로 각 수준별로 구체적인 예 또는 예제를 통하여 그에 부합되는 학습 내용(개념, 원리, 법칙 등)을 정리해 나가는 귀납적 방식의 수업도 병행해야 할 것이다.

(4) 소집단별 수행 과제 활동

수준별 능력에 따른 과제(open-response tasks)를 제시하여 학생들이 과제를 수행하면서 어떤 수학적 지식을 사용하고 또 어떻게 접근해 나가야 하는지 등에 관하여 스스로 탐색해 볼 수 있도록 해야 한다. 그러므로 45분의 수업 시간에 모든 활동이 이루어져야 한다는 제한된 시각에서 벗어나 수업 이외의 시간을 활용하여 좀 더 발전 지향적인 장 · 단기 과제를 다루는 것이 바람직할 것이다. 특히 소집단별 수행 과제 활동은 본인이 속한 집단의 구성원들과 그 결과를 기록하여 발표할 수 있는 '의사소통' 능력의 발휘가 가능하므로, 이를 통하여 다양한 자료를 수집, 표현, 분석, 해석함으로써 과제를 성공적으로 수행할 수 있도록 해야 할 것이다.

IV. 수학적 문제 해결

01 문제 해결의 의미

20세기 초에 이루어진 문제 해결에 대한 논의는 1960년대의 '새수학' 운동과 1970년대의 '기본으로 돌아가기' 운동과 같은 과정을 거치면서 크게 부각되지는 못하다가, 1980년대에 들어 기초 기능으로서의 문제 해결력에 대한 관심이 높아지기 시작하면서 부흥기를 맞게 된다. 미국의 수학교사협의회인 NCTM(1980)이 'An Agenda for Action'에서 문제 해결이 학교 수학의 초점이 되어야 함을 선언한 이래 1980년대는 문제 해결의 시대라고 할 만큼 이에 대한 다양하고 활발한 논의가 이루어졌다(황혜정 외, 2012, 재인용).

이 같은 문제 해결의 조류는 우리나라의 수학 교육과정에도 서서히 등장하였다. 제3차 교육과정에서 급격하게 도입되었던 수학 교육 현대화의 내용은 제4차 교육과정에서 경감되고 정선되면서 지나치게 어려운 내용보다는 수학의 기초적 기능을 배양하고 문제 해결력을 신장시키는 데 관심을 가지게 되었다. 이어 제5차 수학과 교육과정에서도 수학 내용을 정선하면서 문제 해결력의 신장을 강조하였으며, 제6차와 제7차 교육과정에서는 문제 해결력의 신장을 위한 지도 내용, 전략, 방법 등을 구체적으로 제시하여 문제 해결력의 지도가 보다 적극성을 띠게 되었다.

또한 2007 개정 교육과정에 이어, 2009 개정 교육과정 문서의 모든 교과목의 '교수-학습 방법' 부분에도 문제 해결에 관한 다음과 같은 내용이 명시되어 있다(교육과학기술부, 2011).

> 수학적 문제 해결력을 신장시키기 위하여 교수-학습에서 다음 사항에 유의한다.
> (1) 문제 해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.
> (2) 학생 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.
> (3) 문제 해결의 결과뿐만 아니라 문제 해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.
> (4) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

02 문제의 의미와 유형

가. 문제의 의미

문제 해결에서의 '문제'는 해결의 절차가 이미 알려져 있어서 단순히 계산 연습의 대상이 되는 문제보다는, 구체적이고 확실한 해결 방법을 쉽게 구하기 어렵고 문제 해결 과정에서 다단계에 걸친 다양한 사고가 요구되는 문제를 말한다. 예를 들어 문제 해결이라고 하면 이차방정식의 근의 공식을 배운 후에 근의 공식을 적용하여 주어진 이차방정식의 해를 구하는 것과 같이 배운 내용을 단순하게 적용하여 해를 구하는 연습 문제를 떠올릴지도 모른다. 그러나 최근 수학 교육에서 중요시되는 문제 해결은 이미 배운 수학적 사실이나 알고리즘을 단순히 적용하는 수준의 것이 아니다. 진정한 문제는 목표는 분명하지만 그 목표에 이르는 길이 즉각적으로 주어져 있지 않은 것이다. 문제의 해결에 이르는 알고리즘이나 풀이 방법이 이미 주어져 있거나 알려져 있다면 그 문제는 진정한 의미의 문제라고 보기 어렵다.

나. 문제의 유형

문제의 유형을 분류하는 데에는 여러 가지 견해가 있지만, 가장 보편적인 방법 중의 하나는 '정형 문제'와 '비정형 문제'로 구분하는 것이다.

■ 정형 문제(routine problems)

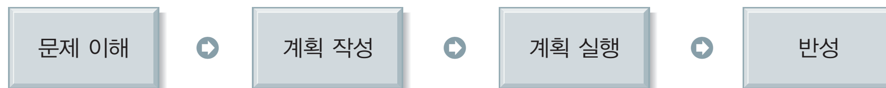
이미 제시된 알고리즘을 사용한다. 예를 들어 공식에 나오는 변수에 특정한 수를 대입하여 해결할 수 있는 문제나 전형적인 예제의 풀이 방법을 그대로 적용하여 해결할 수 있는 문제가 해당된다.

■ 비정형 문제(non-routine problems)

문제를 해결하는 알고리즘이나 답을 얻는 방법을 모르는 상태에서 문제 해결 전략이나 독자적인 해결 방법을 고안하여 풀어야 하는 문제를 말한다.

03 문제 해결 과정

폴리아(Pólya, 1957)는 수학적 문제 해결의 과정을 다음과 같이 4단계로 구분하여 제시하고 있다.



다음 표는 문제 해결의 각 단계에서 교사가 사용할 수 있는 적절한 질문과 권고의 예이다.

〈표 Ⅳ-1〉 문제 해결 단계별 질문의 예

문제 해결 과정		해당 질문
문제 이해	문제를 이해하는 단계로, 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 알고 용어의 뜻을 파악하며 문제를 분석하는 단계이다.	• 미지인 것, 주어진 것은 무엇인가? • 자료는 무엇인가? • 조건은 무엇인가? • 그림을 그려 보고, 적절한 기호를 붙여라.
계획 작성	문제에서 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계로 여러 가지 문제 해결 전략을 이용하게 된다. 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 즉각적으로 발견할 수 없을 때에는 보조 문제를 고려해야 한다.	• 전에 그 문제를 본 적이 있는가? • 친숙한 문제 중에서 미지인 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보아라. • 유사한 문제는? • 문제를 푸는 데 필요한 조건을 모두 사용했는가?
계획 실행	해결 계획에 따라 실행하는 단계이다.	• 풀이의 각 단계를 조심스럽게 실행하도록 하라. • 각 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가? • 각 단계가 옳다는 것을 설명할 수 있는가?
반성	문제를 해결한 과정을 처음부터 검토해 보고, 다른 방법으로 해결할 수는 없는지 알아본 뒤, 혹시 다른 방법이 있으면 어느 방법이 더 나은지를 비교해 본다.	• 결과를 점검할 수 있는가? • 풀이 과정을 점검할 수 있는가? • 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가? • 결과나 방법을 다른 문제에 활용할 수 있는가?

한편 문제 해결 전략이란 문제 해결에 도움이 되는 일반적인 절차나 해법의 단서가 되는 생각, 발견의 실마리를 얻도록 하는 방법 등의 사고 전략을 뜻한다. 크룰릭과 루드닉(Krulick, Rudnick, 1984)은 문제 해결 전략으로 패턴 찾기, 거꾸로 풀기, 추측과 검증, 모의실험, 환원, 목록 작성, 논리적 연역, 자료 정리(그래프, 방정식, 대수식, 표, 차트, 도식)를 제시하였으며, 그리노(Greeno, 1978)는 어림산, 단순화하기, 실험하기, 그림 그리기, 표 만들기, 그래프 그리기, 방정식 세우기, 규칙성 찾기, 순서도 구성, 판단 공간(decision-space)의 분할, 연역 논리로 문제 해결 전략을 구분하였다.

04 문제 해결의 예

다음에 주어진 문제를 폴리아(Pólya, 1957)의 문제 해결 4단계를 따라 풀어 보면 다음과 같다.

> 예 직사각형의 둘레의 길이가 35 cm이고 가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배라고 하면, 가로의 길이는 얼마인가?

① 문제의 이해

문제에서 구하려는 것은 가로의 길이이며, 문제에서 주어진 것은 직사각형의 둘레의 길이가 35 cm이고 가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배라는 사실이다.

② 계획 세우기

직사각형의 세로의 길이를 x라고 하면, 가로의 길이는 $2.5x$가 된다. 직사각형의 둘레의 길이는 네 변의 길이의 합과 같으므로 $x+2.5x+x+2.5x=35$

③ 계획의 실행

방정식을 풀면 $7x=35$, 즉 $x=5$이므로 가로의 길이는 $2.5\times5=12.5$(cm)이다.

④ 풀이의 반성

풀이 과정을 검토하여 잘못된 곳은 없는지 확인한다. 또 다른 방법으로도 문제를 해결할 수 있는지 조사한다. 이 문제의 경우 다음과 같이 풀 수도 있다.

가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배이므로

$$(\text{가로의 길이}):(\text{세로의 길이})=2.5:1=5:2$$

이고, 둘레의 길이가 35 cm이므로

$$(\text{가로의 길이})+(\text{세로의 길이})=\frac{35}{2}=17.5$$

따라서 가로의 길이는 $17.5\times\frac{5}{7}=12.5$(cm)이다.

예와 유사한 문제를 다음과 같이 만들어 풀어 본다.

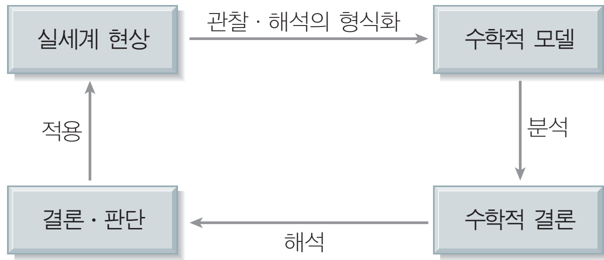
> 둘레의 길이가 35 cm인 직사각형의 가로의 길이가 세로의 길이보다 3 cm 더 길 때, 가로의 길이를 구하여라.

05 문제 해결 과정과 수학적 모델링

가. 문제 해결 과정과 수학적 모델링

수학적 모델링은 문제 해결의 특징을 지니지만, 비수학적 문제 상황에서 출발하는 것을 기본으로 한다는 점에서 문제 해결과 차별화된다(NCTM, 1991). 즉, 수학적 모델링은 비수학적 대상에서 수학적 표상을 찾는 것으로, 대상이나 체계 또는 과정의 중요한 특징을 이루는 수학적 구조나 이론을 세우는 것을 말하며, 어떤 현상에 관한 문제를 해결하기 위하여 원래의 문제 상황을 수학적으로 표현하는 수학화의 과정을 중시한다. 특히 한 체계에서의 개념이나 문제 상황을 다른 체계로 번안하여 내면화하거나 해결해 가는 과정은 모델링 과정의 전이가 쉽게 일어나도록 할 수 있음을 의미한다. 또한 수학적 모델링은 수학과 다른 과목 또는 일상생활과의 연결성을 강조한다. 이것은 수학 학습의 초점이 완결된 지식의 획득이 아니라 지속적인 모델의 구안과 수정을 통한 본 개념의 이해에 맞추어져야 함을 의미한다.

일상생활에서의 경험이 모델링 과정을 통해 수학적으로 재조직될수록 한 체계에서 다른 체계로 쉽게 전이되어 요소들 사이의 관계 구조의 파악이 용이하고, 이를 바탕으로 실세계에서 제기된 문제를 해결할 수 있다. 수학적으로 의미 있는 모델을 구성하는 모델링 과정은 4단계의 순환 과정으로 구성되며, 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 Ⅳ-1] 수학적 모델링 과정(NCTM, 1991)

NCTM(1991)의 '*Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*'에서는 수학적 모델링 과정을 다음과 같이 설명하고 있다.

① 현상을 관찰하여 그 현상에 내재되어 있는 문제 상황을 명료히 밝히고, 문제에 중요한 영향을 미치는 요인들을 찾는다.
② 요인들의 관계를 추측하고 그 요인들을 수학적으로 해석하여 현상에 적합한 모델을 구축한다.
③ 적절한 수학적 분석을 구축한 모델에 적용한다.
④ 결과를 얻어 내고 그 결과를 현상에 맞도록 재해석하여 결론을 도출한다.

요약하면 수학적 모델링은 실세계의 여러 현상을 수학적인 수단에 의해 정리하고 조직하는 활동으로, 문제를 해결하기 위하여 여러 가지 수학적 표현으로 변환하면서 현상에 내재된 수학적 개념을 파악, 문제를 해결하여 실세계의 문제 상황에 적용할 수 있도록 하는 활동 과정이다. 이러한 수학적 모델링을 통한 수학 학습은 새로운 수학적 개념을 도입하거나 이미 개발된 수학적 개념을 새로운 상황에 적용하는 데 유용하여, 중요한 수학적 아이디어와 문제 해결 과정에 강력한 수단이 된다. 따라서 수학적 모델링을 통하여 수학 교육에서 다음과 같은 목적을 달성할 수 있다(Niss, 1989).

- 새로운 수학적 개념과 방법을 이해한다.
- 실생활 또는 다른 교과에서의 수학의 응용과 모델링의 실제를 이해한다.
- 창의적 사고와 문제 해결 태도, 활동, 능력을 기른다.
- 수학을 활용하여 실생활 또는 다른 교과와 연결된 맥락을 비판적이고 합리적으로 사고하는 태도를 기른다.
- 수학이 이미 완성된 산물이 아니라, 인간 활동의 결과로 만들어지고 있는 것임을 이해한다.

나. 수학적 모델링의 예

연못에 있는 물고기의 수를 조사하는 다음 상황을 통해 수학적 모델링을 살펴보자.

(1) 문제 상황

이 게임의 목적은 연못에 있는 물고기의 수를 알아내는 것이다. 이러한 정보는 연못을 관리하고 물고기에 대해 파악하는 데 도움을 줄 것이다. 연못에 있는 물고기의 수를 어떻게 추측할 수 있겠는가?

(2) 필요한 수학 개념

비와 비율

(3) 모델

우리는 연못에 있는 물고기의 수를 알 수 없으므로, 물고기의 수를 n마리라고 하자.

우선 몇 마리의 물고기를 잡아 물고기가 다치지 않게 꼬리에 표를 달고, 다시 그 물고기들을 연못에 놓아준다고 가정하자. n마리 중에서 p마리를 잡아 표시를 하고, 며칠 후에 q마리의 물고기를 잡는다면 그중에는 꼬리표를 단 것도 있고 달지 않은 것도 있을 것이다. 이때 꼬리표를 단 물고기의 수를 x라고 하면, 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\frac{p}{n}=\frac{x}{q}$$

p, x, q 모두 측정값이므로, n의 값을 구할 수 있다.

다음은 앞과 같은 활동을 10번 시행한 예이다.

표본 채취 순서	꼬리표를 단 물고기의 수	표본 수
1	3	15
2	0	15
3	3	15
4	1	15
5	2	15
6	4	15
7	6	15
8	2	15
9	4	15
10	2	15

이때 좀 더 정확한 n의 값을 구하기 위해서는, x의 평균 $\bar{x}$를 구하여 다음과 같은 식을 세울 수 있다.

$$n=\frac{pq}{\bar{x}}$$

예를 들어 처음에 표시한 물고기의 수(p)가 10마리이고 다섯 번 표본을 채취했다면, $\bar{x}=1.8$, $p=10$, $q=15$이므로 $n=83$이다.

위와 같이 연못에 있는 물고기의 수를 측정하는 이러한 과정을 'the capture/recapture' 방법이라고 하며, 이것은 게임으로도 사용되고 보존청에서도 활용되고 있다.

V. 수학과 평가의 특징 및 방법

01 수학과 평가의 동향

1990년대 초 미국 NCTM의 대안적 평가의 강조를 기점으로, 우리나라에서도 1995년 교육개혁위원회 주체의 '세계화 · 정보화 시대를 주도하는 신교육체제 수립을 위한 교육개혁방안' 수립, 1997년 서울시교육청의 초등학교 새물결 운동, 1997년 제7차 교육과정 개정 등의 영향으로 학교 현장에 수행 평가가 점차 반영되기 시작하였다. 결과적으로 우리나라에서도 전통적인 평가 방식의 변화 및 개선의 필요성이 인식되면서 새로운 평가 방법의 도입이 요청되고 이를 위한 대안으로 학교 현장에의 수행 평가 도입 및 활성화 방안이 추진되었으며, 이는 현재까지 지속적으로 강조되고 있다.

이에 대한 실례로 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 모든 교과목에서의 평가 부분은 다음과 같이 진술되어 있다(교육과학기술부, 2011).

가. 수학 학습의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하고, 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 수업 방법을 개선하는 데 활용되어야 한다.

나. 수학 학습의 평가에서는 학생의 인지 발달 단계를 고려하고, 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수한다.

다. 수업의 전개 국면에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가 등을 적절히 실시하되, 지속적인 평가를 통하여 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.

라. 수학 학습의 평가에서는 선택형 위주의 평가를 지양하고 서술형 평가, 관찰, 면담, 자기 평가 등의 다양한 평가 방법을 활용하여 수학 학습에 대한 종합적인 평가가 이루어질 수 있게 한다.

마. 인지적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수-학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.

(1) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력
(2) 수학의 용어와 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 능력
(3) 수학적 지식과 기능을 활용하여 추론하는 능력
(4) 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력
(5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력
(6) 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력
(7) 수학적 지식과 기능을 바탕으로 창의적으로 사고하는 능력

바. 정의적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 수학 및 수학 학습에 대한 관심, 흥미, 자신감, 가치 인식 등의 정도를 파악한다.

사. 수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용과 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공한다.

이상의 내용을 중심으로 우리나라 수학과의 평가 동향을 간략히 살펴보면, 우선 평가를 통하여 학생에 대한 등급을 매기기보다는 학생과 교사에게 도움을 주는 것이 강조되어 있으며, 최종 결과의 평가보다는 과정에 대한 평가를 강조하고 있다. 또한 객관식 선다형 위주의 평가를 지양하고 주관식 지필 검사, 관찰, 면담 등 다양한 평가 방법을 활용하여 종합적인 수학 학습 평가 등을 권장하고 있다. 특히 최근 들어 인지적 영역에 대한 평가뿐만 아니라 정의적 영역에 대한 평가도 점차 강조되고 있다. 아울러 평가 상황에서도 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구 및 교구의 적절한 이용을 권장하고 있음을 알 수 있다.

02 수학과 평가의 원리

학교 수학에서의 평가는 주로 교수-학습 방법의 개선을 위하여 이루어져야 하는데, 그동안 평가는 수준 판정 및 선발의 목적을 달성하는 데 치중해 왔다. 이로 인해 평가는 학생들에게 도움을 주기보다 많은 심적인 부담을 안겨 주었으며, 그러한 평가 결과는 교사의 수업 방법을 반성하고 개선하는 데 그다지 활발히 활용되지 못하였다. 또 지식을 측정하는 지필 검사가 전적으로 활용되고, 창의력, 탐구력과 같은 고등 정신 능력과 흥미, 관심, 열의와 같은 정의적 능력을 평가할 수 있는 다양한 평가 방법이 활용되지 못하였다. 이렇듯 잘못된 평가 방식은 교육 본연의 모습을 그르칠 수도 있지만, 반대로 올바른 평가 방식은 교육 본연의 모습을 찾는 데 절대적인 영향을 미친다. 이에 따라 수학 교과에서 점차 지향되고 있는 평가의 동향이나 특징에서 알 수 있는 바와 같이, 수학과 평가가 바르게 이루어지기 위해서는 다음과 같은 기본 원리가 지켜져야 한다(황혜정 외, 1997).

가. 발달적 교육관을 중시하는 평가

평가는 그 방향과 방법에 영향을 주는 기준하에서 선발적 교육관과 발달적 교육관으로 대별할 수 있는데, 발달적 교육관에서의 교육 평가는 학생의 선발이나 개인차를 내는 데 관심이 있는 것이 아니라, 모든 학생이 가능한 한 의도하는 바의 수업 목표를 달성할 수 있도록 모든 학습자에게 적절한 학습 방법을 배치하기 위한 평가를 하게 된다. 또한 학생 간의 서열과 개인차를 내기 위한 평가 방법보다는 주어진 수업 목표를 어느 정도 달성하였는가 하는 수업 목표 달성도의 평가에 그 관심이 집중된다.

발달적 교육관은 준거지향평가의 관점으로 귀결된다고 할 수 있다. 평가의 목적에 따라서 상대평가를 하여야 할 때가 있고, 준거지향평가를 하여야 할 때도 있다. 그러나 수학과 평가가 수학적 능력을 신장시킨다는 목적을 달성하기 위해서는 교사가 선발적 교육관보다는 발달적 교육관을 지녀야 한다. 그럼으로써 교사는 교육 목표의 달성도와 학생의 학습 과정에 더욱 관심을 기울이고 자신의 수업 방법과 평가 방법에 대해 보다 반성하며 학생 개개인에 적합한 교수-학습 방법을 적용할 수 있다.

나. 다양한 평가 방법을 수반하는 평가

그동안 수학 교과에서 다양한 평가 방법이 사용되지 못한 주된 이유는 교사에게 주는 부담, 그리고 다양한 평가 방법을 활용할 수 있는 다양한 형태의 수업을 하는 데 교사가 익숙하지 못하기 때문이다. 또 수학에서는 지필 검사만으로도 학생들의 수학적 능력을 충분히 평가할 수 있다는 잘못된 인식 때문일 수도 있다. 그러나 지필 검사만으로는 다양한 상황에서 다양하게 표현되는 수학적 능력을 종합적으로 바르게 평가할 수 없다. 수학이 타 교과목과는 다른 특성을 지니고 있다고 하더라도, 수학적 능력 역시 다양한 평가 방식을 통해서 바르게 평가될 수 있다. 이제까지의 일상적인 수업 방법을 탈피하여 학생들의 수학적 사고를 자극하는 새로운 수업 방법을 적용하여 보고, 또 이에 부합하는 새로운 방법으로 평가를 해야 할 것이다.

다. 문제 해결 과정을 중시하는 평가

현재의 수학과 평가에서는 정 · 오답 여부, 점수, 석차 등이 중요시되고 있으며, '학생이 어떠한 사고 과정을 거쳐서 이 문제를 해결하였는가?', '학생이 사고 과정에서 어떤 오류를 범해서 문제를 풀지 못하였는가?'는 중요시되지 않는다. 이는 다인수 학급에서의 평가의 효율성, 선발적 교육관, 상대적 평가관이 중요시되는 분위기 때문이다. 그러나 이러한 평가 방식이 계속 적용되면 학생은 사고 과정, 문제 해결 과정의 타당성보다 정 · 오답 여부에만 신경을 쓰기 때문에 학생의 수학적 사고 능력, 문제 해결력은 향상되지 못한다. 또 교사는 학생 개개인이 지닌 사고 과정의 결함을 알 수 없기 때문에 그러한 결함들이 발견되어도 치유되기 어렵다. 교사 역시 자신의 교육 방법을 반성해 가면서 학생을 지도할 기회를 가지기

어렵다. 그러므로 이러한 일을 가능하게 하려면 다양한 풀이 과정과 방법이 공유되는 해결(또는 수행) 과정을 중요시하는 평가가 이루어져야 할 것이다.

라. 정의적 영역의 능력을 중시하는 평가

정의적 영역의 평가는 수학적 지식 및 기능에 관한 인지적 영역의 평가 못지않게 중요하다. 학생이 가지는 수학적 성향은 그가 수학에 계속적으로 관심을 가지고 공부를 하며, 높은 성취를 이룰 수 있을 것인지를 판단하는 중요한 준거가 된다. 최근 들어 우리나라에서도 정의적 영역에 대한 평가의 중요성이 점차 인식되고 있다. 이는 우리나라 학생들이 국제 학업성취도 비교 평가에서 수학 학업성취 수준은 세계 최상위권임에도 불구하고, 정의적 수준은 최하위권인 것으로 나타났기 때문이다. 많은 학생들이 수학은 재미없고 어려운 과목, 일상생활에 도움이 안 되는 과목, 대학 입시를 위한 과목 등 매우 부정적인 교과로 인식하고 있는 것으로 나타났다. 이는 우리 사회에 큰 우려감을 주고 있으며, 이에 대한 개선책이 요구되고 있다(박선화 외, 2010).

그럼에도 불구하고 우리의 현실에서 정의적 영역에서의 평가가 제대로 이루어지고 있지 않은 이유는 평가에서의 주관성과 교사의 주관적 판단을 중요하게 여기지 않고 신뢰하지 못하는 분위기, 평가상의 번거로움, 교사들이 쉽게 이용할 수 있는 평가 도구나 자료의 부족 때문이다. 이에 따라 교사의 주관적 판단의 중요성을 인식하고 그것을 신뢰하며, 평가상의 번거로움을 최소화하고, 교사들이 손쉽게 이용할 수 있는 관찰 또는 면담지 등의 평가 도구가 개발되고 제공된다면, 정의적 영역에 대한 평가도 보다 활성화될 수 있을 것이다.

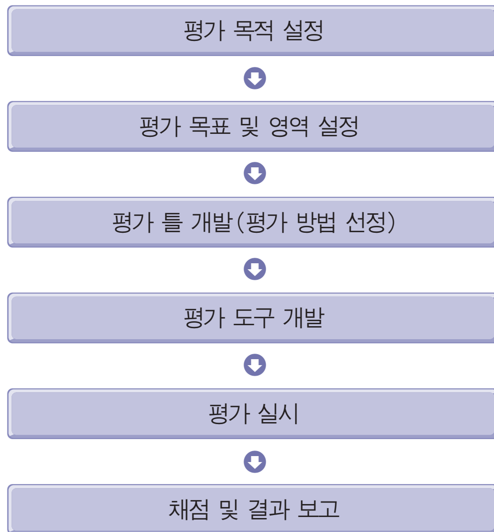
여기서 수학에 대한 정의적 특성의 의미와 구성 요소를 간단히 살펴보면 다음과 같다. 한국교육과정평가원(박선화 외, 2010)에서는 수학에 대한 정의적 특성을 수학에 대한 경험으로 인하여 형성된 정서, 신념, 동기 등을 포함하는 심리적 특성으로 정의하여 제시하였다.

〈표 Ⅴ-1〉 수학에 대한 정의적 특성의 요소

범주	하위 요소	정의
정서: 비교적 강하게 단시간 동안 계속되는 감정. 희노애락, 애증, 공포, 쾌감 등	흥미	교과나 학습 주제 등에 대해 주관적으로 느끼는 선호도 및 학습 활동에 참여함으로써 발생하는 즉각적인 재미
	호기심	지속적이면서 일관되게 새로운 것을 추구하는 개인의 심리적 경향성
	수학 불안	수학 교과 자체 또는 수학과 관련된 일이나 문제 등에 대하여 긴장하고 두려워하거나 걱정하고 염려하는 심리 상태
신념: 어떤 아이디어, 사건, 행위 등과 같은 대상에 대해 여러 반응을 시도하고 다양한 시행착오의 과정을 반복하면서 형성된 가치 체계	수학관	문화적 가치와 사회적 기대를 경험과 학습을 통하여 내면화한 것으로 수학이 가지고 있는 교과로서의 특성과 그에 적절한 학습 방법에 관한 개인적인 관점
	가치 인식	사회적 맥락이나 학습자 자신의 삶의 맥락과의 관계 속에서 수학의 기능과 유용성에 대한 평가
	귀인	수학과 관련된 성공과 실패의 원인에 대한 개인적 지각으로 원인의 소재(내적 · 외적 요인), 안정성, 통제 가능성에 대한 추론
동기: 학습 활동을 유발하고 지속하게 하는 힘으로서 학습 활동을 의미 있고 가치 있는 것으로 보고 학습 활동으로부터 의도된 가치를 얻고자 하는 경향성	목표 지향성	성취 상황에서 개인이 과제를 수행하는 목표에 대한 개인의 지향성으로, 타인과 비교하거나 자신의 능력을 타인에게 증명하기 위한 목표인 수행 목표와 과제의 숙달이나 능력을 향상하기 위한 목표인 숙달 목표로 구분됨
	자기 효능감	목표 달성에 필요한 행동 과정을 조직하고 행하는 자신의 능력에 대한 믿음으로, 특정한 시간에 주어진 특정 과제를 잘 수행할 수 있는지에 대한 인식
	자기 조절력	개인적 목표 설정과 설정한 목표를 성취하기 위한 행동 조정으로, 장기적 목표 달성을 위해 바람직한 행동을 추구하고 그렇지 않은 행동은 억제하여 충동적이거나 즉각적이지 않고 스스로 문제를 신중하게 계획, 해결, 평가하려는 경향성

03 수학과 평가 절차

평가는 상황에 따라 다양한 형태로 시행되므로 모든 상황에 적용 가능한 평가 절차를 규명하기란 쉽지 않다. 하지만 교사가 평가 주체자가 되어 학생들의 수학적 능력이나 태도를 평가하는 경우에 초점을 두어, 평가 시행을 위한 기본 절차를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 Ⅴ-1] 수학과 평가의 기본 절차

평가를 하고자 할 때 가장 먼저 고려해야 할 것은 '어떤 목적으로 평가를 할 것인가'를 결정하는 일이다. 진단평가나 형성평가와 같이 교사가 자신의 수업에 대한 피드백을 얻기 위한 목적으로 평가를 실시한다면 수업을 진행하기 전이나 진행하는 도중에 평가를 실시하여 그 결과를 수업 개선에 활용하게 될 것이다. 반면 총괄평가와 같이 학생들의 성취 정도에 따라 등급을 결정하는 것이 목적이라면 보다 객관적인 평가 방법을 이용하며, 평가의 내용도 한 학기 또는 일 년 동안 학생들이 학습한 전체 내용을 포괄하는 것이 더 타당할 것이다. 이처럼 평가의 목적에 따라 평가 내용, 방법, 시기 등 진행되는 평가의 전체적인 모습이 달라지므로, 우선 평가를 하고자 하는 목적부터 염두에 두어야 할 것이다.

두 번째 단계에서는 첫 번째 단계에서 결정한 평가 목적에 따라 평가하고자 하는 영역(이하 평가 영역)을 설정하고, 해당 영역의 주요 교육 목표가 무엇인지 확인하여야 한다. 이때의 교육 목표는 각 문항에 대한 구체적인 평가 목표를 뜻하는 것이 아니라 교육과정의 목표 및 내용에 준하여 해당 평가 영역의 교육 목표를 설정하는 것을 말한다.

세 번째 단계에서는 균형 있는 평가 도구 개발을 위하여 평가 틀을 개발하는 것이다. 평가 틀은 평가 영역의 교육 목표를 분석하여 이를 잘 반영할 수 있도록 설정된 행동 영역과 내용 영역, 평가 목표, 평가 문항 유형, 각 요소별 문항 출제 비율 등을 포괄적으로 포함한다.

또한 이때 평가하고자 하는 목적, 평가하고자 할 영역, 그리고 그 영역에 해당하는 교육 목표를 토대로 이에 부합하는 평가 방법을 선정하여야 할 것이다. 예를 들어 총괄평가를 실시할 목적으로 특정 평가 영역을 선정하여 해당 교육 목표가 확인되었을 때, 인지적 영역 능력에 관한 평가를 실시하기 위해서는 이에 부합하는 평가 방법을, 정의적 영역 능력에 관한 평가를 실시하고자 할 경우에는 이에 따른 적절한 평가 방법을 사용해야 할 것이다.

네 번째 단계는 위의 세 번째 단계를 통해 마련된 평가 틀에 부합하는 평가 도구를 개발하는 과정이다. 평가 도구 개발 시에 문항의 양호도, 검사 시행의 시간 소요 등을 고려하여 문항을 개발하고 그에 따라 모범 답안 및 채점 기준도 개발하여야 한다. 이때 '평가 도구 개발'이란 인지적 영역의 평가에서 지필 검사를 위한 평가 문항 개발, 채점 기준 및 예상 답안 작성과 정의적 영역에서의 평가를 위한 평가(주로 관찰 및 면담) 요목 개발, 기록 방법 작성 등을 총체적으로 일컫는 말이다.

다섯 번째 단계에서는 평가를 실시하고, 가채점을 통하여 사전에 준비한 채점 기준 및 예상 답안의 적절성을 검토하여 이를 수정 · 보완한 후, 이를 참고로 하여 실제적인 채점에 임하도록 한다.

마지막 단계로는 평가 목적에 따라 적절한 방법으로 기록하여 그 결과를 보고하도록 한다.

04 수학과 평가 틀 개발 시 유의 사항

학교 수학에서 수학 교육 목표를 내용과 행동 수준에 맞추어 평가하는 것은 바람직한 일이며, 이를 위해서는 수학과에 적합한 평가 틀을 마련하여야 한다. 평가 틀은 평가 도구 개발 및 평가의 전 과정에서 평가 방향과 평가 관련 항목을 선택하거나 결정할 때 판단의 준거가 된다. 평가 틀은 평가에 관한 보다 체계적이고 포괄적인 구조를 설명할 수 있다는 장점과 더불어 평가 문항과 내용 및 행동 영역의 적합성을 판정하고 설명하는 데 용이하다고 할 수 있다. 〈표 V-2〉, 〈표 V-3〉 참조

수학과 평가 틀을 개발하는 데 있어서 고려해야 할 제한 사항은 다음과 같다.

첫째, 일반적으로 평가의 목적은 우수 학생을 선발하려는 것이 아니고 학생들의 교육 성취 정도(수준)가 얼마나 되는지, 그리고 각각의 수준에 도달한 학생들이 얼마나 되는지 파악하는 데 있으므로 평가 틀이 학생들의 성취 수준을 골고루 측정해 낼 수 있도록 세워져야 한다. 그러므로 가장 기초가 되는 수준에서부터 우수한 학생까지의 성취 정도가 잘 드러날 수 있도록 다양한 수준의 문항으로 구성되어야 한다.

둘째, 가능하면 평가 요소를 적어도 내용 영역과 행동 영역으로 이원화하도록 한다. 특히 행동 영역을 설정하여 소홀하기 쉬운 '지식의 활용 또는 적용' 능력에 의미 있는 비중을 두도록 한다. 동시에 폭넓은 수준의 학업 성취의 정도를 파악할 수 있도록 행동 영역을 가장 기초적인 지식이나 단순 계산에서부터 보다 복합적인 사고를 요구하는 탐구나 문제 해결 능력까지 평가의 대상으로 삼아, 학생들이 어느 영역에 더 높은 성취를 보이는지 파악할 수 있도록 한다.

셋째, 평가 틀의 구성에 있어서 시대적 요구가 강한 행동 영역을 의도적으로 평가 틀에 포함시키도록 한다. 예를 들어 의사소통 능력과 같이 시대적으로 강력히 요구되고 있으면서도 실제 학교 현장에서는 소홀히 다루어지는 능력을 평가 틀에 과감히 도입함으로써 학교 교육과정 운영에 있어서 선도적 역할을 기대해 볼 만하다.

〈표 V-2〉 수학과 평가 틀의 예

행동 영역 / 내용 영역	계산	이해	추론	문제 해결
수와 연산				
문자와 식				
함수				
확률과 통계				
기하				

〈표 V-3〉 수학과 평가 틀에서의 인지적 행동 영역의 정의

행동 영역	정의
계산	여러 가지 계산법, 나아가 문제 해결에 이르기 위한 명확한 절차, 즉 알고리즘을 능숙하게 구사할 수 있는 능력에 관한 것
이해	기본적인 수학적 개념, 원리, 법칙 및 그 관련성을 이해하여 의미 충실한 개념적 사고를 형성할 수 있는 능력에 관한 것
추론	• 관찰, 열거, 실험 등을 통한 귀납과 유추, 추측에 의해 수학적 법칙과 문제의 해법을 발견할 수 있는 능력에 관한 것 • 조건명제의 증명, 삼단논법에 의한 연역적 추론, 반례에 의한 증명, 간접증명법, 모순법, 동치인 명제의 증명, 수학적 귀납법 등을 이용한 증명을 읽고 이해할 수 있으며, 이러한 방법을 사용하여 수학적 명제를 증명할 수 있는 능력에 관한 것
문제 해결	• 수학의 여러 가지 내용 사이의 개념, 원리, 법칙 등의 관련성이 요구되는 수학 내적인 문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것 • 수학과 일상생활 및 타 교과 내용과의 관련성의 파악이 요구되는 통합 교과적(수학 외적)인 소재의 응용 문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것

05 서술형 및 수행 평가 문항의 채점 방법

서술형 또는 수행 평가 문항 등에서 학생들은 문제(질문 내용)조차 이해하지 못하는 경우, 문제는 이해했으나 풀이 과정이 틀린 경우, 또는 풀이 과정은 옳으나 계산 과정이 미흡하여 실제로 결과를 나타내는 부분이 틀린 경우 등 여러 가지 반응을 나타낸다. 실제로 학생들의 문제 풀이를 평가하는 데 있어서 가장 어려운 부분은 여러 가지 유형의 오류들을 드러내는 풀이를 어떻게 평가할 것인가를 결정하는 일이다. 이때 풀이 과정을 중시하여 채점하는 방법으로는 '분석적 점수화 방법'과 '총체적 점수화 방법'을 들 수 있다(Charles, et. al., 1987).

먼저 '분석적 점수화 방법'이란 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 단계(과정)를 구체화하여 각 단계별로 채점 요소를 세우고 점수를 배당하는 방법을 말한다. 이때 어떤 특정 요소에 대한 채점 결과가 다른 요소에 대한 채점 결과에 영향을 주어서는 안 되며, 각 문항마다 채점 요소를 지나치게 세분화하지 않도록 한다. 분석적 점수화 방법은 학생 개개인의 답안지를 면밀히 분석해야 하므로 채점하는 데 많은 시간을 필요로 하지만, 주어진 문제의 해결 과정에 따라 단계별로 수치화한 점수를 부여함으로써 채점자 간의 평점 차를 줄이고 동일한 채점자 내에서도 일관성 및 객관성을 유지할 수 있다는 것이 주요 장점이다. 한편 '총체적 점수화 방법'이란 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 특정 내용이나 과정에 대하여 각각 점수를 부여하는 대신, 풀이 전반에 걸쳐 하나의 점수를 부여하는 방법을 말한다.

서술형 및 수행 평가 문항의 채점을 위한 채점 기준은 주로 분석적 점수화 방법을 토대로 문제 이해, 문제 해결 과정, 답 구하기 등의 과정이 반영되도록 작성한다. 이를 작성하는 과정에서 각 문항의 배점과 채점 요소별 배점은 평가 목적이나 목표에 따라 적절히 부여하도록 한다. 다음은 서술형의 문항에 대한 채점 기준을 분석적 점수화 방법으로 제시한 예이다.

【문항】

작년에 A 중학교의 학생 수는 1050명이고, 금년에는 작년보다 남학생은 4 % 증가하고 여학생은 2 % 감소하여 전체적으로 9명이 증가했다. 금년의 남녀 학생 수를 각각 구하여라.

【모범 답안】

작년의 남학생의 수를 x, 여학생의 수를 y라고 하면

$$\begin{cases} x+y=1050 \\ \frac{4}{100}x-\frac{2}{100}y=9 \end{cases}$$

이므로 $x=500$, $y=550$이다.

따라서

금년의 남학생의 수: $500+\frac{4}{100}\times500=520$(명)

금년의 여학생의 수: $550-\frac{2}{100}\times550=539$(명)

【채점 기준】

영역 \ 요소	채점 요소	배점
문제 이해	작년의 남학생 수를 미지수로 정하기	1점
	작년의 여학생 수를 미지수로 정하기	1점
해결 과정	작년의 학생 수에 관한 식 세우기	1점
	작년보다 늘어난 금년의 학생 수에 관한 식 세우기	3점
답 구하기	금년의 남학생 수 구하기	2점
	금년의 여학생 수 구하기	2점
총점		10점

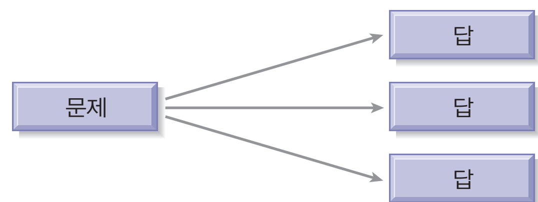
서술형 및 수행 평가 문항에 있어서 모범 답안은 채점 기준을 작성하는 데 있어서 구체적인 지침의 역할을 한다. 문항의 특징이나 성격에 따라 다르겠지만, 일반적으로 수학 교과의 특성상 피험자가 다양한 창의성을 발휘하여 평가자가 생각하지도 않았던 여러 가지 형태의 답을 제시할 가능성은 그리 높지 않다. 하지만 서술형 문항의 경우에는 답안을 작성하는 과정에서 실수나 오답의 가능성이 높으므로 이에 관한 채점 기준을 마련하여 채점 결과의 공정성을 유지해야 할 것이다. 이에 따라 모범 답안과 그에 따른 채점 기준을 구체적으로 마련하고 평가를 실시한 후 이미 작성된 채점 기준(안)을 토대로 일부 학생들의 실제 답안을 '가채점'하는 일은 매우 중요하다고 하겠다. 이는 채점 기준의 요소 중에서 채점자(교사)가 미처 생각하지 못하였던 채점 요소나 부적절하게 배당된 요소별 점수가 있는지를 검토하고, 미비한 부분을 보완 · 수정하기 위함이다. 위와 같은 절차를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

[그림 Ⅴ-2] 채점 절차

06 프로젝트

가. 프로젝트의 의미

프로젝트의 사전적 의미는 '실행 계획서'이지만, 수학 교육에서 프로젝트는 보다 넓은 의미로 무엇을 할 것인가뿐 아니라 그것을 실제로 수행하여 자료를 제시하고 그 결과를 평가하는 것을 포함한다. 프로젝트는 열린 반응을 요구하는 일종의 수행 과제를 말하며, 이때 개방형 문제, 즉 열린 반응(open-ended, open-responded) 문제는 해답이 정해져 있지 않고 학생의 관점에 따라 여러 가지 답이 나올 수 있는 문제를 말한다. 하지만 경우에 따라서 개방형 문제의 답은 모범 답안이 제한되지 않을 수 있다. 즉 결정되지 않을 수도 있다.



[그림 Ⅴ-3] 수학적 모델링 과정(NCTM, 1991)

【개방형 문제의 예】

숫자 4를 네 번 사용하고 +, −, ×, ÷, $\sqrt{\ }$, 분수 등의 기호를 써서 0부터 9까지의 수를 만들어 보아라.

【풀이】

$$0=4+4-4-4=44-44$$

$$1=\frac{4}{4}+4-4=\frac{44}{44}=\frac{4}{4}\times\frac{4}{4}=\frac{4}{4}\div\frac{4}{4}$$

$$2=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=4-\frac{4+4}{4}$$

$$3=\frac{4+4+4}{4}$$

$$4=(4-4)\times4+4=\sqrt{4+4+4+4}$$

$$5=\frac{4\times4+4}{4}$$

$$6=\frac{4+4}{4}+4=\frac{4+4+4}{\sqrt{4}}$$

$$7=\frac{44}{4}-4=\{4-(4\div4)\}+4$$

$$8=4+4+4-4=\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}$$

$$=4\times4\div4+4=4\times4-(4+4)$$

$$9=4+4+\frac{4}{4}$$

학생들은 열린 반응의 과제들을 수행하기 위하여 어떤 수학적 지식을 사용해야 하는지를 결정해야 할 뿐만 아니라 때로는 어떻게 접근해 나아가야 할 것인가에 관한 수학적 방법까지도 결정해야 한다. 이에 따라 프로젝트는 학생들의 실제 생활과 직접 관련되어 그들의 고등 사고 능력을 발휘할 수 있는 문제 상황을 주제로 제시함으로써 과정 중심의 수행 경험을 하게 한다.

나. 프로젝트의 특징과 개발 시 유의점

프로젝트의 특징을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 프로젝트는 어떤 특수한 상황에서 개인이 원하는 바의 깊이 있는 탐구를 가능하게 하므로, 프로젝트의 주제 및 진행 과정을 개별화 또는 차별화하여 개성에 맞게 다룰 수 있다.

둘째, 프로젝트는 구체물에서 서적, 영화, 비디오 등의 매체에 이르기까지 다양한 자료에 대하여 수학적으로 해석하고 설명하는 과정을 포함하므로, 다른 교과 내용과의 연계성에 따른 수학적 가치의 인식이 가능하고 창의적 사고, 비판적 사고 등과 같은 보다 고차원적인 사고 능력을 신장시킬 수 있다.

셋째, 프로젝트는 소그룹의 협동 학습을 통하여 학생들이 자신이 속한 집단의 다른 구성원들과 이야기하고 그들의 활동 결과를 학급 전체에 (말하기와 쓰기의 형태로) 전달함으로써 의사소통 능력을 신장시킬 수 있다.

한편 다음은 프로젝트 개발 시 유의해야 할 사항이다.

첫째, 프로젝트는 학생들이 수학적인 안목에서 현상을 파악할 수 있는지, 또는 배운 수학적 지식을 사용하여 생활의 여러 가지 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 것으로, 판에 박힌 문제(정형 문제)를 지양하고 참신하고 새로운 성격의 주제(문제)를 개발하도록 한다.

둘째, 프로젝트의 채점을 위한 채점 기준은 총체적 점수화 방법과 분석적 점수화 방법을 적절히 고려하여 작성한다. 서술형 문항의 경우와 마찬가지로, 프로젝트의 채점 기준(표)의 작성 과정에서 각 문항의 배점과 채점 요소별 배점은 평가 목적이나 목표에 따라 부여하도록 한다.

다. 프로젝트의 채점 방법

프로젝트의 수행 과정은 다음 〈표 Ⅴ-4〉와 같은 기록지를 사용한 자기 평가(self-assessment) 방법을 이용하여 학생 스스로 작성해 보게 하고, 이를 평가하거나 점검하는 것이 용이하며 바람직하다(황혜정 외, 1997).

〈표 Ⅴ-4〉 학생 자기 평가 기록지(예)

학생 자기 평가 기록지
단원명: ______________________ 날　짜: ______년 _____월 _____일 _____교시 이　름: ______________________　　(_____학년 _____반 _____번)
주제(문제):
해설(풀이):
반성(소감):
자기 평가: 아주 못함(　　)　못한 편임(　　)　잘한 편임(　　)　아주 잘함(　　)
교사 논평:

점선을 따라 자르세요.

한편 프로젝트의 전반적인 활동 과정 및 결과에 대하여 평가하고자 할 때, 다음과 같이 관찰에 의한 평정척도지를 활용하면 편리하다(Krulick 외, 1998).

〈표 Ⅴ-5〉 평정척도법을 이용한 과제 수행 능력 평가(예)

이름: ________________ 날짜: ________________

평정척도

1=불충분 2=만족 3=훌륭함

관찰(면담) 요목			0	1	2	3	논평
과제 수행 능력	주제 이해						
	해결 전략 선정						
	계획 수행						
	검토 및 반성						
	의사소통						
	태도						

07 관찰 및 면담

가. 관찰 및 면담의 특징

관찰 및 면담에서 평가자는 수학 문제의 해결을 위하여 사고하고 있는 개인, 소집단, 또는 학급에 대하여 관찰 내지 면담을 하면서 기록하게 된다. 이 방법은 수학적인 수행 능력과 같은 인지적 영역뿐 아니라 수학에 대한 태도와 신념 등 정의적인 영역까지 평가할 수 있는 장점이 있다. 또한 관찰 및 면담은 검사를 통해 양적으로 확인할 수 있는 학생의 수학적 능력이나 사고에 대하여 보다 심화된 자료를 얻을 수 있다. 하지만 우리나라 교육 현실을 감안할 때, 독자적인 평가 기법으로서의 역할보다는 다른 평가 기법에 의한 결과를 점검하고 보완하는 보조 역할의 의미가 크다.

특히 관찰의 목적으로 사전에 생각하지 못하였던 측면에 대하여도 부수적인 자료를 수집할 수 있다. 또 관찰은 정규 수업 시간 중에 자연스럽게 이루어질 수 있고, 특정한 사고력에 중점을 두고 평가할 수 있으며, 다른 평가 기법에 의한 결과를 점검하고 보완할 수 있다.

관찰이나 지필 검사와 더불어 면담은 학생들과 직접 대화함으로써 문제 해결 상황에서 실제로 나타내 보인 행동이나 서면의 '결과'를 도출해 내기까지의 사고 '과정'에 대한 통찰을 가능하게 하는 기법이다. 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 선별할 수 있다. 또 소그룹별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 면담을 실시하여 평가 목적에 부합하는 정보를 얻을 수도 있다.

나. 관찰 및 면담의 유형

실제로 현장에서 사용할 수 있는 관찰법은 수업 시간에 교사가 학생들을 대상으로 실시하는 비참여 관찰로, 학생 전체 또는 소집단이나 개인별로 자연스럽게 행해질 수도 있다. 다만 교사가 수업을 진행하면서 관찰 결과를 기록할 수 있는 시간이 한정되어 있으므로, 학급 전체보다는 개별 또는 소집단을 대상으로 관찰을 실시하는 것이 효과적이다. 그런데 사실 비참여 관찰의 경우 객관적으로 관찰이 가능하나 관찰의 기회가 적고, 심리적으로 격리되어 있기 때문에 미세한 변화를 파악하기 힘들다.

한편 공식적 면담은 면담자가 미리 만들어진 일련의 질문을 가지고 응답자에게 질문하는 방법이다. 이때 각 면담에서는 똑같은 질문이 똑같은 방법으로 부과되므로, 공식적 면담은 질문지를 언어로 표현하는 방법이라고 볼 수 있다. 이에 반해 비공식적 면담은 면담 계획을 세우되 면담 목적만을 명백히 하여 융통성 있는 접근을 시도하는 방법이다. 따라서 연구자(교사)가 한 현상에 관한 적절한 질문들을 충분히 가지고 있지 않을 때 유용하다. 이러한 면담은 예정된 '질문군'이 없고 본질적으로 탐색전부터 시작한다고 볼 수 있다.

결국 면담이 공식적으로 진행되든 비공식적으로 진행되든, 교사는 주로 정규 수업 외의 상황에서 학생들과의 면담을 통해 그들과 직접 대화함으로써 그들이 수학 수업 상황에 어떻게 수용하고 대처하는지에 대해 보다 깊은 이해를 구할 수 있다. 또 소그룹별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 (비공식적) 면담을 실시하여 평가 목적에 부합하는 정보를 얻을 수도 있다.

특히 공식적 면담은 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 선별하는 데 유용하며, 비공식적 면담은 그들을 진단, 선별하는 것뿐만 아니라 그들의 능력에 따른 처치도 가능하다. 면담은 주로 개별적으로 진행하는 것이 상례이지만, 비공식적 면담의 경우에는 소그룹별로 면담을 진행하여 면담 대상자들끼리 보다 자연스러운 분위기에서 진행됨으로써 보다 정확한 정보를 얻을 수 있는 이점도 있다.

다. 관찰 및 면담 시 유의 사항

일반적으로 관찰을 통해 정기적으로 기록하여 평가하기 위해서는 관찰자인 교사의 많은 시간과 노력이 절대적으로 필요하며, 관찰 목적에 알맞은 현상을 포착하기 어려울 때도 있다. 또한 학생들의 반응을 관찰할 때 편견

을 가지게 되어 관찰 결과에 주관성이 개입될 여지가 있으며, 관찰의 대상이 되는 학생들 역시 관찰자인 교사를 의식하면서 행동이 달라질 수 있다. 사실 교사가 관찰만을 통하여 학생들의 다양한 행동이나 사고 과정 등을 정확히 파악하기는 어렵다.

관찰 시 유의해야 할 점은 다음과 같다.

- 뚜렷한 관찰 목적 또는 문제 의식을 가지고 관찰에 임하도록 한다.
- 관찰 계획을 치밀하게 세워야 한다.
- 부분과 전체의 관련을 지으며 관찰함으로써 피상적인 관찰이 되지 않도록 해야 한다.
- 객관적인 태도로 관찰해야 한다.
- 관찰 기간은 짧게 하고 누적시키는 방법을 쓰도록 한다.

공식적 면담의 경우에는 면담 도중 학생의 반응에 개입하는 일이 없으므로, 사전에 질문 내용들을 신중히 계획하여 작성하면 별 문제가 없으나, 비공식적 면담에서는 교사가 학생의 반응에 따라 수시로 질문하게 되므로 더욱 주의를 해야 한다.

면담 시 유의해야 할 점은 다음과 같다.

- 면담 시 교사의 반응이나 질문으로 인해 대화의 방향이 바뀌어서는 안 되므로 교사의 태도(반응)는 중립적 입장을 취해야 한다.
- 질문의 내용과 시기가 적절해야 한다.
- 학생이 편안하고 안정감을 가지도록 면접 환경과 조건을 구성해야 한다.
- 교사가 면담 시 기본적으로 갖추어야 할 태도는 중립적인 태도, 공정한 태도, 자연스러운 태도, 담화적인 태도, 친절한 태도이다.

라. 관찰 및 면담의 기록 방법

관찰 및 면담의 목적이 결정되면 대상, 장소, 시간, 기록 유형 등의 세부 계획이 진행되어야 하며, 이때 활용될 수 있는 기록 방법에는 체크리스트와 평정척도법 등이 있다.

체크리스트나 평정척도법은 사전에 관찰할 행동 요목을 제작하는 과정에서 많은 시간과 노력이 요구되지만, 그 기록 자료를 재분석하지 않고 평가 자료로 수월하게 활용할 수 있다. 그러나 체크리스트나 평정척도법은 사전에 치밀하게 관찰 요목을 작성하여도 임의적이고 예측하지 못하는 행동이 발생하는 경우에는 적절한 기록을 수행하기가 곤란한 단점이 있다.

관찰 및 면담의 자료(정보)를 수집하면, 그다음 단계로 그 정보들을 요약하고 행동의 패턴을 결정하는 작업이 필요하다. 물론 기록 형태에 따라 정보를 요약하는 방법이 다양하게 개발될 수 있다. 일반적으로는 관찰에 의해 기록된 자료들을 그래프 및 빈도, 시간, 가중치의 평균 등의 기술 통계 수치로 분석한다. 그러나 학교 현장에서는 기록된 자료를 진술문 형태로 요약하여 교사의 전문적 판단에 따라 필요한 조언을 하는 것이 보다 수월하고 바람직하며, 이는 학교생활기록부에서 각 교과에 대한 학생의 발달 상황을 작성하는 기초 자료가 될 수 있다.

관찰 및 면담은 수학에 대한 흥미와 호기심, 수학에 대한 자신감, 수학에 대한 불안, 수학의 유용성 인식, 과제 집착력과 의지, 창의적 사고, 수학 수업에의 참여 등 정의적 영역을 평가하는 데 용이하다. 다음 <표 Ⅴ-6>은 여러 정의적 영역에 대한 평가를 위하여 체크리스트를 사용하여 관찰 또는 면담이 가능한 구체적인 요목들을 제시한 예이다(박선화 외, 2010).

〈표 V-6〉 정의적 영역 평가를 위한 체크리스트지(예)

체크리스트					
정의역 영역	관찰(면담) 요목	학생 1	학생 2	학생 3	학생 4
수학에 대한 흥미와 호기심	• 수학을 하는 것을 즐거워한다.				
	• 수학에서 배우는 것들에 대해 흥미가 있다.				
	• 수학 수업 시간을 기다린다.				
	• 수학에 대한 것을 읽기를 좋아한다.				
	• 수학의 개념이나 원리를 알려고 한다.				
수학에 대한 자신감	• 수학 공부에 자신감을 가지고 있다.				
	• 수학에서 좋은 성적을 받을 것이라고 생각한다.				
	• 수학에서 어려운 내용까지도 잘 이해할 수 있다.				
	• 수학을 가장 잘하는 과목 중의 하나로 생각한다.				
수학에 대한 불안	• 수학 수업이 어려울까 봐 걱정한다.				
	• 수학 성적이 나빠질까 봐 걱정한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 긴장한다.				
수학의 유용성 인식	• 수학이 우리의 생활에 많은 도움을 준다고 생각한다.				
	• 수학이 사고력을 기르는 데 도움이 된다고 생각한다.				
	• 수학이 나중에 공부하는 데 필요하므로 중요한 과목이라고 생각한다.				
	• 수학이 나중에 직장 생활을 하는 데 도움이 된다고 생각한다.				
과제 집착력과 의지	• 수학 공부를 열심히 한다.				
	• 수학 시간에 배운 내용을 확실히 알려고 노력한다.				
	• 수학 문제를 풀 때, 답을 구할 때까지 중단하지 않고 열심히 하려고 노력한다.				
	• 수학 공부를 잘하기 위해 계획을 세우고 스스로 노력한다.				
창의적 사고	• 다른 사람의 방법을 그대로 따라 하는 것보다는 스스로 생각하고 탐구한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 다른 사람과는 다른 독특한 방법을 찾아보려고 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 한 가지 방법으로 해결하는 것보다는 다양한 방법을 찾아보려고 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 내가 알고 있는 방법 중에 어떤 것이 더 적절한지를 생각한다.				
수학 수업에의 참여	• 수학 수업 시간에 모둠 활동에 적극적으로 참여한다.				
	• 수학 수업 시간에 다른 생각을 한다.				
	• 수학 수업 시간에 발표를 많이 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 아이디어를 다른 학생들과 공유한다.				

VI. 좋은 수업의 의미

01 좋은 수업에 대한 관점의 변화

어떤 수업이 좋은 수업인가에 대한 견해는 구성주의 이론의 도래와 함께 바뀌기 시작하였다고 볼 수 있다. 구성주의 인식론에서는 지식을 개인이나 집단이 적극적으로 만들어 낸 경험적 구성물로 본다. 즉, 학생들은 모든 지식을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 학생 스스로 능동적 구성 활동에 의해 이를 형성한다는 것을 그 주된 요지로 삼고 있다. 이와 같은 관점에서 생각해 볼 때 교사의 가장 중요한 역할은 학생들이 개념을 탐구하고 개념 사이의 관련성을 잘 이해할 수 있도록, 다시 말해 구성 활동이 잘 일어날 수 있도록 총체적인 환경을 조성해 주는 것이다.

학습 기회의 제고라는 측면에서 좋은 수업을 진단할 때, 학습 기회란 수업을 통해 가르쳐진 것과 평가되어지는 것 사이의 중복 정도를 의미한다. 이는 수업 중에 다루어지는 교육과정의 내용과 평가의 내용이 수업의 주요 목표를 반영해야 함을 뜻한다. 그러므로 1980년대 이래로 교육과정의 개정은 교사가 아닌 학생 중심의 교육을 강조하고, 실생활과 학교 교육 내용을 연결시키며, 단순 암기나 훈련보다는 이해와 사고에 초점을 두어 왔다.

따라서 진정한 학습은 일상의 학습 상황에서 다양한 정보와 같은 인지적 도구 혹은 다른 사람들의 도움을 받아 학생들이 확실하게 어떤 문제 상황을 파악할 수 있을 때 일어난다고 볼 수 있다. 그러므로 학습자는 문제를 해결하면서 개개인이 직접 이미 알고 있던 지식을 사용하여 새로운 지식을 만들어 내는 과정을 통하여 자신의 생각을 다양한 방법으로 적용하고 또 새로운 의미를 창출함으로써 그와 관련된 내용을 이해하게 된다는 것이다(von Glasersfeld, 1993).

다시 말하면 구성주의에 입각한 수학 수업의 방법은 어떤 개념을 습득함에 있어서 고정되고 활동력이 없는 인식이 아닌 가변적이고 유용한 인식의 발달을 강조한다. 학습은 사회 활동을 하는 가운데 일어나며 학습자들 간, 혹은 교사와 학생 사이에 생각이나 아이디어를 서로 교환함으로써 이해를 증진시킨다(남승인, 1998). 이때 교사는 학생 스스로가 의미 있는 학습 활동에 참여할 수 있도록 도와주어야 한다. 아울러 학습자는 능동적이고 무한한 잠재력과 가능성을 가지고 있다고 보며, 따라서 학습자 개개인의 생각과 아이디어를 학습 활동에 최대한 반영하여야 한다는 것이다. 이렇게 볼 때 중앙집권식 교육과정의 편성 · 운영을 탈피하고 현장 중심으로 전환함으로써 학습자들을 보다 창의적인 교육과정에 의해 가르칠 수 있게 된다고 본다(최승현 외, 2002).

〈표 Ⅵ-1〉 좋은 수업을 위한 교수-학습 관점의 변화

교수-학습 관점의 변화		
강의식 전체 수업, 교사의 지시 중심 수업	➡	경험적, 귀납적, 실제적인 학습
수업 시간 중 학습자의 수동성: 좌석에 앉아 있기, 정보를 듣고 암기하기	➡	수업 시간 중 학습자의 능동성: 모든 학생들이 학습에 직접 참여하기
학습지, 시험지, 연습지 등의 활동	➡	고등 사고력을 강조한 중심 개념과 원리 배우기
모든 교과 영역의 많은 학습량을 교사가 직접적으로, 간단히 다루기	➡	학습의 과정(계획, 정리, 관찰, 평가)에 대한 학습자의 책임하에 학습자 자신이 직접 연구 과제를 결정하기
어떤 사실이나 사항을 단순 암기하기	➡	학습자 개개인의 정의적인 요구나 다양한 인식 양식에 관심을 가지기

성적이나 학업 경쟁을 강조하기	➡	교실을 독립된 작은 사회로 만들기 위한 협동 또는 합작 활동
능력별 그룹을 만들거나 능력별 이름 붙이기	➡	다양한 능력의 학생들을 같은 그룹에 배치하여 활동하기
특별 프로그램을 대용하기	➡	교사, 학부모, 학교 직원들의 다양하고 협동적인 역할을 활용한 일반 학급에서의 특별 지도
표준화 검사를 사용하기	➡	교사들의 관찰로 얻어진 질적 형태의 기술적 평가 사용하기

02 수학과 좋은 수업의 조건

수학과 교과 특성을 반영한 '좋은 수업'이란 '좋은 수업'에 대한 범교과적 정의와 그 궤도를 함께하면서, 수학 수업과 관련하여 현장의 교사들이 제기하는 문제점들을 효과적, 현실적으로 해결해 나가고 있는 수업들이라는 가정하에, 현장의 수학과 수업 지도와 관련하여 제기되어 온 문제점을 감안한 수학과 좋은 수업 선정 기준은 다음과 같다(최승현 외, 2002).

가. 교육과정과의 일관성을 유지하면서 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업이어야 한다.

현장의 수학 교사는 수학과 목표와 본질에 부합되면서 학생들의 요구, 능력 및 흥미에 알맞게 교육과정을 재구성할 필요가 있다. 실제로 좋은 수업을 진행하는 교사는 장기적인 기대, 학습 목표, 계획, 학습 활동, 자료 및 평가의 모든 측면을 포함하여 교실 수준에서 실행된 교육과정을 계획, 실천 및 평가하여야 한다(NCTM, 1993). 그뿐만 아니라 수업 목표와 목표 달성을 위하여 모든 교육과정의 요소들을 결합한 일관성 있는 체제를 유지해야 한다.

교육과정과 학습 내용 사이의 일관성을 유지하는 것은 학생들로 하여금 유의미한 지식을 구성할 수 있도록 한다. 즉, 학생들이 학교 밖 생활에서도 쉽게 접근하여 활용할 수 있는 지식을 구성할 수 있도록 하여야 한다. 이때 교사는 (1) 수학과 교육과정과 일관성을 유지하면서 핵심적인 내용들을 심도 있게 학습할 수 있도록 학습 내용의 폭을 줄이고, (2) 학습 내용을 중요한 개념 중심으로 구조화하여 제시하며, (3) 주요 개념들과 그들 사이의 관련성을 쉽게 설명할 수 있도록 교육과정 내용을 재구성하고, (4) 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업의 결과를 반영하는 학습 활동과 평가 방법을 학생들에게 제공해야 할 것이다.

나. 수학 수업에서는 수학적 경험이 실생활에 활용되는 가치 있는 것임을 학생들이 인식하여 실생활의 수학적 상황에 전이될 수 있도록 해야 한다.

현장의 수학 수업에서의 문제점은 현실과 유리된 많은 양의 수학적 지식을 교과서나 틀에 박힌 수업 양식에 의존하여 가르친다는 것이다. 좋은 수학 수업을 위해서는 학생들 스스로 문제를 이해하고, 문제 해결의 과정에 관련된 다양한 전략들을 활용하여 실제적으로 문제를 해결하며, 그 과정을 반성해야 한다. 즉, 학생들이 설계한 문제 해결 활동이 이루어지는 기회를 제공하여야 한다. 학교에서 배운 수학이 학교 밖의 다른 실제 상황들에서 활용될 수 없다면, 수학을 학습할 필요성이 줄게 된다. 즉, 학교에서 배운 수학 지식은 실생활에 적용될 때 보다 유의미해진다. 따라서 좋은 수학 수업이란 학생들이 수업 시간에 배운 지식, 이해, 추론 및 문제 해결을 다른 학문 분야에는 물론 실생활 상황에도 적용할 수 있도록 가르치는 수업이다. 장래에 수학이나 과학과 관련된 직업에 종사하게 될 학생들뿐만 아니라 교양을 갖춘 시민이

되기 위하여 학교 수학 교육은 우리가 살아가고 있는 현실 세계에 대한 이해와 흥미를 길러 줄 수 있어야 한다 (OECD, 2001).

학교에서는 도형의 넓이나 부피에 대하여 배우지만 실생활에서 어떻게 활용되는지, 어떤 경우에 필요한지를 파악하지 못한다면 이러한 내용들을 학습하는 의미가 반감된다. 그러므로 수학 교사들은 학교 수학을 대학 입시를 위한 과목으로만 중요하게 취급할 것이 아니라, 현실 세계를 살아갈 수 있는 수학적 소양을 갖춘 시민을 양성한다는 취지를 잊지 말고 가르쳐야 할 것이다. 이러한 맥락에서 수학 교사의 중요한 역할은 수학적 능력이 지역 공동체 속에서, 학생들의 일상생활 속에서, 나아가 보다 광범위한 사회적 당면 과제들 속에서 어떻게 적용되는가를 학생들이 파악할 기회를 제공하여야 한다(NCTM, 1989, 1991). 그러므로 학교에서 배운 것을 다른 상황으로 전이할 수 있는 학생의 능력 양성을 위해 교사는 다음과 같은 측면을 강조하여 수업하여야 한다.

- 적절한 수준의 내용을 이해하지 않고서는 실생활로의 학습 전이는 기대하기 어려우므로, 학습한 내용을 숙달하도록 한다.
- 학생들이 학습한 내용에 대하여 다른 상황으로 전이할 수 있음을 인식하도록 한다.
- 학습한 내용과 관련된 교과 내 다른 영역과 타 교과 영역에 적용하도록 한다.
- 학생들이 스스로 학습하고, 스스로 평가한 결과를 피드백할 수 있도록 돕는다.
- 단순 암기보다는 이해를 추구하는 수업을 진행한다.

다. 수학 수업은 현대의 수학 지식을 반영하는 내용과 첨단 기술의 발달을 반영한 기술과 도구의 학습이 요구되므로 컴퓨터, 멀티미디어 및 다른 기술 등과 통합되어야 한다.

수학이 생성되고 응용되는 방법이 현대화되면서 학생들이 배워야 하는 수학적 아이디어나 수학적 입장도 변화되고 있다. 예를 들어 학교 수학에서는 규칙이나 공식으로 설명될 수 있는 필연적인 사건을 주로 다루는 반면, 실생활의 현상에서는 임의의 모델인 경우가 대부분이다. 이러한 변화의 원동력은 컴퓨터의 보급이다. 컴퓨터의 도입으로 지금까지는 생각지 못했던 새로운 유형의 문제를 만들 수 있게 되었고, 수학의 내용과 방법도 많이 달라졌다. 예를 들어 연속적인 것에서 이산적인 것으로, 정확한 것에서 반올림한 값으로, 추상적인 것에서 구체적인 것으로, 이론적인 것에서 경험적인 것으로 변화되었다.

컴퓨터와 계산기는 수학적 아이디어와 응용을 탐구할 기회를 제공한다. 예컨대 저학년의 학생들도 계산기 자체를 수학적인 대상으로 생각하며 계산기의 기능과 규칙을 배울 수 있다. 고학년의 학생들은 그래픽 소프트웨어를 이용하여 함수의 그래프, 함수의 변환을 탐구할 수 있으며, 그 결과 함수 관계를 전보다 더 쉽게 이해할 수 있을 것이다(신동선 외, 1998). 이와 같이 공학적 기술 도구의 사용은 학습 환경을 풍부하게 만들 뿐만 아니라 학습의 질을 향상시킨다. 즉, 학생들은 이러한 기술이 없었다면 불가능했을 활동들을 경험하고 참여할 수 있게 된다. 인터넷이나 모의실험(simulation) 등의 기술들은 수학과 실생활을 연결시키고, 나아가 학습 환경을 보다 넓은 범위로 확산시킬 수 있는 능력을 가지게 한다.

라. 학생들의 선행 지식(기존 지식)을 고려한 수학 수업이어야 한다.

좋은 수학 수업은 새로운 지식을 선행 지식에 관련시킬 수 있는 수업이어야 한다. 그러나 학생들이 선행 지식을 지니고 있는 것만으로 바람직한 학습 결과를 가져오지는 않으며, 학생들이 선행 지식을 새로운 이해와 학습에 활용할 수 있도록 교사가 학습자의 선행 지식에 관심을 기울이고, 이러한 선행 지식을 수업의 출발점으로 활용할 때 비로소 학습이 촉진될 수 있다. 그러므로 수학과 좋은 수업을 위해서는 교사가 학생들이 이미 지니고 있는 선행 지식을 이끌어 내고, 직접적인 체험 활동이나 사고 활동을 통하여 새로운 개념을 도입하며, 나아가 학생들의 기존의 개념을 새로운 개념과 연결하여 통합적인 개념으로 수정해 나가야 한다(Driver 외, 1995).

이와 같이 학생들이 선행 지식을 활성화하여 수학과 학습에 활용할 수 있도록 수업을 할 때, 교사는 다음과 같은 측면을 고려해야 한다.

- 교사는 학생들이 가지고 있는 선행 지식이 무엇인가 정확히 파악하여야 한다.
- 교사는 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행 지식을 활성화하도록 수업 시작 시 수업의 내용에 대하여 논의한다.
- 때때로 학생들의 선행 지식이 불완전하거나 치명적인 오개념을 포함하고 있을 수도 있으므로, 교사는 학생들이 지니고 있는 불완전하거나 잘못된 개념을 상세히 조사할 필요가 있다.
- 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행 지식을 갖추지 못한 경우, 교사는 중요한 선수 학습 자료들을 미리 다루어 수업 진행에 차질이 없도록 해야 한다.
- 교사는 학생들이 선행 지식과 새로운 학습 내용을 연관지을 수 있도록 적절한 질문을 제공하여야 한다.
- 교사는 학생들이 선행 지식과 새로운 개념의 관계를 파악하고, 또 다른 형태의 통합적인 개념을 형성하도록 도와야 한다.
- 교사는 교수-학습에 관한 인지심리학의 이론에 초점을 맞추어 수업해야 한다.

마. 학습자 스스로 문제 해결 활동을 수행할 수 있도록 이끄는 수업이어야 한다.

좋은 수업이란 학생들로 하여금 주어진 수학 문제를 이해하고 그 풀이 과정을 추론하며 이를 이용하여 문제를 해결할 뿐만 아니라 교사나 다른 학생들에게 자신의 방법을 설명할 수 있도록 하는 일련의 학습 전략을 가르치는 수업이다. 보스니아도(Vosniadou, 2001)는 교사가 학생들에게 학습 전략들을 가르치기 위한 체계적인 노력을 할 때, 학생들이 실질적인 성과를 얻을 수 있다고 주장하였다. 이러한 학습 전략들은 학습 과정을 촉진하고 학습을 제고할 뿐더러 학생들이 주어진 상황에 적절한 방법으로 문제를 이해하며 이를 해결할 수 있도록 돕는다는 측면에서 중요하다. 그러므로 문제 해결에 있어서 보다 적용 범위가 넓을수록 성공적인 학습 전략이 된다.

여기서 중요한 것은, 교사는 학생들에게 단순히 수학적 지식의 전달과 수학을 하는 방법을 가르치는 것에만 국한할 것이 아니라 학생들에게 자신의 학습을 스스로 관리, 감독할 수 있는 메타인지 학습 전략을 가르쳐야 한다는 것이다. 구체적인 학습 기능과 내용도 중요하지만, 학습자가 스스로의 학습 과정을 감독하고, 학습이 일어나는 중에 자신의 마음에 어떤 변화가 일어나는지를 의식한다는 것은 보다 고차원의 학습을 위해 중요하다. 즉, 학생들은 주어진 학습 목표 달성을 위해 자신의 학습 진행 과정을 측정하고, 끊임없이 감독하고, 스스로 조절하며, 반성적으로 사고할 필요가 있다.

학습에서의 자기 조절(self-regulation)이란 학습자 자신이 스스로의 학습 과정을 평가하고 이해 수준을 점검하며, 필요시 실수를 수정할 수 있는 전략들을 개발하는 것을 포함한다. 교사는 다음과 같은 기회를 제공함으로써 학생들이 자기 조절적인 학습자가 되도록 도울 수 있다.

- 문제를 해결함에 있어서 학생 자신이 문제 해결 전략이나 방법을 계획하도록 한다.
- 사용 가능한 가장 효과적인 학습 전략들은 무엇이며, 이들을 어떻게 사용할 것인지를 알도록 가르친다.
- 학생 스스로 자신의 수학적 사고 과정을 점검하고, 이해 수준에 따라 문제가 요구하는 질문에 답할 수 있도록 한다.
- 주어진 진술문이나 주장, 문제에 대한 해결책 등에 대하여 평가하도록 한다.

바. 학생들의 동기 유발이 가능한 수학 수업이어야 한다.

일반적으로 학습에 대한 동기가 유발된 학습자는 설정한 목표를 달성하려는 열의가 있으며, 끈기와 의지를 가지고 학습 성취에 많은 노력을 기울이게 된다. 이는 수학 학습에 있어서도 마찬가지이다. 그러므로 학습자의 동기는 학습되는 양과 질에 영향을 미치게 되며, 수학 교사들은 동기 유발된 학습자를 원한다. 교사의 말과 행동은 학생들의 목표 달성 의지에 영향을 미치게 되며, 내적 동기가 유발된 학습자는 학습 성취를 위해 더 노력하게 된다. 교사가 학생들의 내적 동기 유발을 위해 취할 수 있는 행동들은 다음과 같다.

- 새롭고 흥미 있는 학습 과제를 제공함으로써 학생들이 호기심을 갖고 고차원의 사고 기술을 사용하도록 장려한다.
- 학생들의 성취를 외적인 요인이 아닌 내적인 요인들로 귀착시키고 스스로의 수학적 능력에 대하여 자신감을 가질 수 있도록 격려한다.
- 학생 각각의 수준에 실현 가능한 목표를 설정하도록 조언한다.
- 학생들의 수학적 성취를 인정하고, 그 결과에 대하여 정직하게 평가한다.
- 학생들의 성취 결과를 내적 동기를 유발할 수 있는 언어를 사용하여 피드백할 뿐만 아니라 학생들이 활용하는 학습 전략을 개선할 수 있도록 그 방법을 제공한다.

사. 지식 위주의 평가보다는 실제 상황에 기초한 평가 방법을 수반하는 수학 수업이어야 한다.

실제 상황에 기초한 평가 방법 중 하나인 수행 평가는 그 목적과 수행 과정, 그리고 평가 결과가 모두 일치하고 있다. 바람직한 평가는 수업에서 다룬 내용에 대하여 평가하고, 평가가 수업과 일관될 뿐만 아니라 의도한 학습 목표와 일치하며, 나아가 수업의 방식과도 일관성을 유지하는 평가이다. 예를 들어 고차원의 분석과 추론 기술을 활용한 수업에서 학습한 것을 선다형 객관식 문항으로 평가하는 것은 수업의 방법과 평가 사이에 일관성이 결여된 경우이다. 교육 개혁의 중요한 한 부분을 차지하고 있는 수행 평가는 실생활 과제와 상황에서 학생들의 수행 능력을 측정하고 반영하는 것이다.

좋은 수학 수업에는 수업에서 기대되는 학습의 본질, 사용된 학습 자료, 일관성을 유지한 다양한 평가 전략들이 포함된다. 수학과 좋은 수업에서의 평가는 학생들에게 기대되는 것과 결과에 대한 명확한 의사 전달이 요구된다. 이때 평가는 수업과 일관성 있게 통합되어 서로에게서 유용한 정보를 얻을 수 있도록 한다. 수업과 평가를 통합하기 위하여 교사들은 다음 사항들을 주목하여야 한다.

- 학생들에게 도전적이고, 학생들의 발달 단계상 적절한 학습 표준을 개발한다.
- 학생들 사이의 개인차를 적절하게 고려한다.
- 학생들의 수학에 대한 이해 발달을 도울 수 있는 수업 및 평가 전략을 선택한다.
- 상호 양립 가능한 수업 및 평가 전략을 선택한다.
- 다양한 방법과 도구를 활용하여, 학생들의 과학적 추론 기술과 과학 개념의 이해에 대하여 체계적으로 자료를 수집한다.
- 학생들이 그들의 지식, 이해 수준 및 기술을 다양한 방법으로 증명할 수 있는 기회를 제공한다.
- 다양한 수준에서 다양한 방법으로 이루어진 평가 결과들을 교수-학습의 개선을 위해 활용한다.

학교 현장에는 학생들의 수준을 고려한 학생 개인 수준에 맞는 학생 중심 교육과정이 구현되어 있는데, 교사뿐만 아니라 교장, 교감 차원에서도 이에 적합한 평가 방법을 생각해 보아야 한다. 모든 실제 상황에 기초한 평가의 시행 및 운영을 교사에게만 맡긴다는 것은 교사에게 지나친 부담이 될 수도 있다.

VII. 수학과 수업 평가

01 수학과 수업 전문성의 의미

학교 교육에서 교사의 역할이 중요해지고 교사의 책무성에 대한 기대가 높아지면서, 세계 여러 나라에서는 우수한 교사를 확보함과 동시에 현직 교사의 전문성 발달을 촉진하고자 각별한 노력을 기울이고 있다. 이러한 상황에서 학생들의 학습을 평가하기 위한 활동과 평가 방법을 고안하고 그 효과를 경험한 교사들은 이러한 수업 전문성 기준의 유용성을 알고 있으며, 교사의 수업 전문성 평가에도 학생 평가와 같은 원리가 적용된다. 수업 전문성 기준에 비추어 교사의 수업 전문성을 평가(즉, 수업 평가)를 하기 위한 방법들이 제시되고 있으며, 이러한 평가의 시도 자체가 교사들의 좋은 수업 실행을 위한 하나의 기준이 될 수 있다.

구체적인 수학과 수업 전문성 기준 개발의 방향은 다음과 같다(임찬빈 외, 2006).

첫째, 수학 교사의 수업 활동을 총망라하는 포괄적인 기준을 제시한다. 다시 말하면 수학과 수업 전문성 기준은 교사의 수학 수업 전-중-후 활동인 수업을 준비하기 위한 과정-실제 수업 실행-수업 후 반성과 평가 · 향후 개선 노력 등을 종합적으로 다룬다.

둘째, 수학과의 모든 내용 영역에 공통적으로 적용할 수 있는 종합적인 기준을 제시한다. 즉, 특정 영역이나 단원에 국한하는 기준보다는 각 영역에 고루 적용할 수 있는 대표적인 기준을 중심으로 제시한다.

셋째, 각 기준 간의 상호 연계를 고려하여 제시한다. 즉, 수업의 흐름을 고려하여 각각의 기준을 독립적인 영역과 요소로 제시하되, 이들 간의 관계가 상호 의존적으로 연계됨을 보여 준다. 수업이란 복합적이고 다면적일 뿐만 아니라 수업의 제 양상은 상호 의존적이다. 이러한 다층적 위계 속에서 수업 평가 기준의 대영역을 설정하고 다시 중영역과 하위 요소로 세분하여 제시한다.

넷째, 목적과 상황에 따라 유연하게 선택할 수 있는 종합적인 기준 목록을 제시한다. 즉, 수학과 수업 평가 기준은 모든 수업에 획일적이고 고정적으로 적용하는 것이 아니라, 목적과 상황에 따라 기준들을 선정, 조합하고 수학과 각 영역의 특성에 따라 그것들을 변용하여 달리 적용할 수 있음을 고려한다.

다섯째, 수업 전문성 기준은 하나의 개별 기준도 다양한 방식으로 접근하여 판단할 수 있음을 전제하여 제시한다. 교사의 전문성과 수업의 양상은 한 가지 측면에서 살피기보다는 다양한 각도에서 접근하고 판단할 필요가 있다. 예전에는 주로 수업 활동에 초점을 맞추어 수업 평가가 이루어졌기에 교실 수업 관찰이 가장 강력한 평가 도구였지만, 수업 전문성은 수업 전-후의 활동을 모두 포함하므로 교실 수업 관찰만으로 기준의 달성 정도를 가늠하기 어렵다. 따라서 특정 기준이 달성된 정도를 판단할 때에는 전문성 기준 영역과 요소별로 다양하게 제시하고, 나아가 각각의 기준도 다양한 방법으로 적용할 수 있음을 전제한다.

여섯째, 수업 전문성 기준은 수업을 위한 장 · 단기적인 계획이나 단원 단위로도 활용할 수 있도록 충분히 고려하여 제시한다. 수업 전문성 기준의 적용은 하나하나의 수업에 국한하지 않으며, 수업 전-중-후를 포괄하여 설정하여야 한다.

요약하면, 수업 전문성 기준은 좋은 수업 활동의 실제를 특징짓는 요소들이라고 규정지을 수 있다. 그러므로 수업 전문성 기준은 (1) 초보 교사를 위한 지침, (2) 숙련된 전문가 교사를 위한 지침, (3) 개선 노력을 집중할 부분을 파악하는 구조, (4) 교사 집단 이외의 다른 공동체들과의 의사소통의 수단으로 사용될 수 있다.

교사의 수업 활동에 대한 전문성 기준이 마련되었을 때, 관계 당사자들은 공유된 개념과 가치 속에서 개선을 위한 노력을 어디에 집중할 것인지에 대한 논의를 할 수 있게 된다. 아울러 수업 전문성 기준에 교직의 임무와 역량, 우수한 교수 활동의 수준을 명확하게 규정해 놓음으로써 타 분야의 사람들로부터 신뢰받을 수 있고, 교직의 위상을 높일 수 있게 된다. 교사들은 교수 활동을 기술하는 공통된 용어의 가치를 익히 알고 있다. 또한 수업 전문성 기준은 교사들에게 '우수성'에 대한 합의된 기준을 제공함으로써 모범적인 교수 활동에 대한 교사들의 대화를 조직하는 역할을 한다. 이러한 대화를 통하여 경력자뿐만 아니라 초보자의 수행 수준을 향상시킬 수 있을 것이다.

한편 수업 전문성 향상을 위한 평가, 즉 수업 평가 기준에서 규정하는 교사의 가장 중요한 역할은 학생들이 주요 내용 학습에 참여할 수 있도록 지원하는 것이다. 수학과 수업 평가 기준의 구성 요소들은 이러한 목적하에 조직되며, 중요한 내용을 학습할 때 교사는 학생들과 함께 학습자 공동체를 조성해 나아가야 할 것이다.

대니얼슨(Danielson, 1996)은 초임 교사와 경력 교사들이 함께 활용할 수 있도록 보완한 수업 평가 기준을 제시하면서 복합적인 교수 활동을 4개 영역(계획과 준비, 교실 환경, 수업, 전문적 책임)으로 구분하였다(임찬빈 외, 2004, 재인용). 이 수업 평가 기준은 교사의 전문성 발달 단계를 파악하여 각 영역에 알맞은 해당 요소들을 제시함으로써 교사로 하여금 전문성을 계발하고 자기 반성에 활용할 수 있도록 하였다.

수업 평가 기준을 개발 · 실행하는 과정에서 교사는 공동의 연구를 해야 할 뿐만 아니라 평가 기준 개발을 뒷받침하는 원리와 목적에 대한 이론적 근거도 확보하여야 한다. 무엇보다도 수업 평가 기준을 개발하고 설계함에 있어서 주요 이해 당사자들인 교사, 전문가 집단, 정부 기관 등의 참여와 논의가 요구되며, 그에 대한 활용을 전제로 개발하여야 한다. 이때 주의해야 할 것은 교사 자신이 수업 평가 기준을 지원하는 결정적인 역할을 하여야 활용이 가능하게 된다는 점이다.

또한 수업 평가 기준은 자기 평가나 동료 평가, 상호 평가 등으로 활용될 수 있도록 보다 상세하게 개발되어야 하며, 교사의 가르치는 활동에는 일정한 기준이 있다는 점도 제시하여야 한다. 대부분의 교사들은 전문적인 교수 활동의 필수 요소들을 이해하고 있음에도 불구하고, 지극히 관념적인 수준에서 표현하는 경우가 흔히 있는데, 이 점을 특히 주의해야 한다. 동료 교사들뿐만 아니라, 학생, 학부모 및 사회의 다른 구성원들이 교사에게 요구하는 지식과 역량을 명시하는 수업 평가 기준은 좋은 교수 활동을 파악하고 알리며 보상할 수 있는 수단이 되기도 한다.

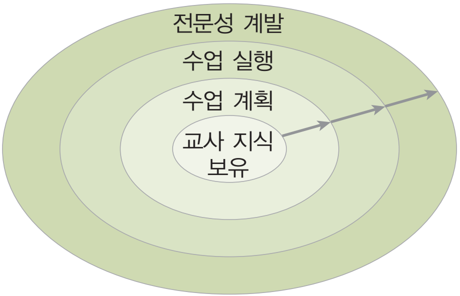
02 수학과 수업 영역 및 요소

가. 수업 평가 영역

수업 평가는 수업 전, 수업 중, 수업 후의 단계별로 진행할 수 있으며, 이러한 수업 단계는 '지식 보유', '수업 계획', '수업 실행', '수업 반성' 부문으로 구성되는데, 이는 교사가 좋은 수업을 하기 위해서는 다음과 같은 요건을 갖추어야 하기 때문이다.

- 교사가 알아야 할 것 ⇨ 지식 보유
- 교사가 준비해야 할 것 ⇨ 수업 계획
- 교사가 행해야 할 것 ⇨ 수업 실행
- 교사가 전문성 발달을 위해 해야 할 것 ⇨ 수업 반성

아는 것이 바로 수업의 실행으로 옮겨지는 것만은 아니지만, 일반적으로 교사가 계획을 세우고 준비하는 것은 수업에 영향을 주고, 이러한 모든 것은 실시한 수업에 대한 교사의 반성적 실천의 영향을 받게 된다. 이렇듯 [지식 보유] ⇨ [수업 계획] ⇨ [수업 실행] ⇨ [수업 반성]의 연계성이 있음을 나타내고 있다. [그림 Ⅶ-1] 참조



[그림 Ⅶ-1] 교사의 수업 단계

위의 [그림 Ⅶ-1]에서 알 수 있는 바와 같이, 교사의 '지식 보유'는 교사가 갖추고 있는 지식에 관한 이해 정도가 수업을 원만히 진행하는 데 충분하다고 생각하는가, '수업 계획'은 본인이 준비한 수업 계획 정도가 수업을 원만히 진행하는 데 충분하다고 생각하는가, '수업 실행'은 본인이 계획한 대로 수업을 충실히 실행하였다고 생각하는가, 그리고 '수업 반성'은 본인의 수업 실행 결과에 만족하는가 등을 반영하기 위한 것이다.

수업 평가를 위한 세부 영역 및 이에 관한 설명은 다음 〈표 Ⅶ-1〉과 같다.

〈표 Ⅶ-1〉 수업 평가 영역

수업 평가 영역		수업 평가 영역에 관한 설명	비고(수업 평가 요소)
교과 내용	• 교육과정 이해 및 재구성	교육과정 목표 및 내용에 관하여 정확히 이해하고, 이를 적절히 재구성하여 수업에 반영하는 것	수학과 교육과정 목표 및 내용에 부합하는 수업 진행하기
	• 수학 내용	소양이 되는 학교 수학 및 학문 수학에 관하여 충분히 이해하고, 이를 수업에 적절히 반영하는 것	학교(중등) 수학 및 학문 수학에 기초하여 내실 있는 수업 진행하기
	• 방법적 지식	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 충분히 이해하고, 이를 효과적으로 수업에 반영하는 것	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 적절히 반영하여 수업 진행하기
	• 수학적 가치	수학적 가치와 중요성을 충분히 인식하고, 이를 수업에 적절히 반영하는 것	수학적 가치와 중요성이 전달되도록 수업 진행하기
학습자 이해	• 학습자 수준	학습자의 인지 수준, 선행 지식, 학업 성취 수준 등을 파악하고 이를 적절히 수업 시간에 반영하는 것	학습자 수준에 부합하는 학습 내용 및 과제, 활동을 수행하기
	• 학습자 오개념	학습자의 오개념을 인지하고 이에 대처하는 것	학습자의 오개념을 파악하여 적절한 피드백 주기
	• 학습 동기	학습자의 관심 및 흥미도를 파악하고 이를 고취시키는 것	학습자 수준이 반영된 적절한 수업 활동을 통하여 학습 동기 및 흥미 유발하기
	• 수학적 태도	학습자의 자신감, 신념 등을 파악하고, 이를 증진시키는 것	학습자의 수학 학습에 대한 긍정적 태도 증진시키기
	• 학습 방법	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 파악하고, 이를 수업에 반영하는 것	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 반영하여 수업 진행하기
교수 학습 방법 및 평가	• 수업 목표 및 내용 반영	교육 목표 및 내용을 파악하고 이에 적합한 교수 학습 방법을 수행하는 것	수업 목표 및 내용에 적합한 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 문제 해결 활동 반영	수학적 문제 해결과 관련된 전반적인 활동을 인지하고 이를 적절히 반영하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	수학적 문제 해결 관련 활동을 적절히 활용하여 수업 진행하기
	• 학습자 수준 및 태도 반영	학습자의 인지 수준 및 정의적 특성을 인지하고, 이를 적절히 반영하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	학습자 수준 및 태도에 부합하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 질문 및 의사소통 활용	효과적 질문 및 의사소통에 관해 인지하고, 이를 적절히 활용하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	효과적 질문 및 의사소통을 수반하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 평가 방법 및 절차 마련	수업 목표, 학습자 수준, 평가 목적 등에 따른 평가 방법 및 절차를 계획하고 마련하는 것	평가 목적에 부합하는 평가 방법 및 절차 마련하기
	• 평가 도구 개발	학습 목표에 따른 평가 목표, 문항, 기준 선정 및 실행에 관하여 인지하고 이를 수행하는 것	평가 계획에 준하는 적절한 평가 도구 개발하기
	• 평가 결과 활용	수업 개선 및 학습 처치를 위한 피드백 계획 및 실행을 교사가 인지하고 수행하는 것	수업 개선 및 학습 처치에 유용하도록 평가 결과 활용하기
수업 상황	• 도구 및 교구, 자료 활용	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료 등을 파악하고, 이를 준비하여 수업에 활용하는 것	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료를 준비하여 활용하기
	• 교실 환경 및 수업 집단 조성	여러 도구 및 교구, 자료의 효율적인 활용성을 이해하고, 이에 맞춰 수업 환경 및 집단을 구성하는 것	공학적 도구, 교구, 자료 등의 효율적 활용을 위하여 적절한 수업 집단 및 교실 환경 조성하기
	• 학습 태도 및 수업 분위기 조성	교사가 해당 수업 내용에 관한 학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기를 인지하고, 이를 유도하는 것	학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기 유도하기
	• 학생 관리 및 수업 상황 대처	학습자의 어려움 또는 질문 등을 인지하고, 이를 효율적으로 대처하는 것	학습자의 어려움 및 질문 등을 합리적으로 처리하기

나. 수업 평가 요소

수업 평가 영역에 따른 수업 평가 요소는 다음 〈표 Ⅶ-2〉와 같이 평정척도법을 이용하여 평정척도를 3단계 정도로 두는 것이 적당하며, 경우에 따라서는 5단계로 좀 더 세분화하여 사용하도록 한다.

수업 평가 요소를 수업 전(지식 보유 및 수업 계획), 수업 중(수업 실행), 수업 후(수업 반성)의 상황으로 세분화하여 제시하면 다음과 같다.

〈표 Ⅶ-2〉 수학 수업 평가 요소

수업 평가 영역		수업 평가 요소		평정척도		
				그렇다	보통이다	그렇지 못하다
교과 내용	1. 교육과정 이해 및 재구성	수학과 교육과정 목표 및 내용에 부합하는 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 수학 내용	학교(중등) 수학 및 학문 수학에 기초하여 내실 있는 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 방법적 지식	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 적절히 반영하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 수학적 가치	수학적 가치와 중요성이 전달되도록 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
학습자 이해	1. 학습자 수준	학습자 수준에 부합하는 학습 내용 및 과제, 활동을 수행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 학습자 오개념	학습자의 오개념을 파악하여 적절한 피드백 주기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습 동기	적절한 수업 활동을 통하여 학습 동기 및 흥미 유발하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 수학적 태도	학습자의 수학 학습에 대한 긍정적 태도 증진시키기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	5. 학습 방법	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 반영하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			

교수 학습 방법 및 평가	1. 수업 목표 및 내용 반영	수업 목표 및 내용에 적합한 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 문제 해결 활동 반영	수학적 문제 해결 관련 활동을 적절히 활용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습자 수준 및 태도 반영	학습자 수준 및 태도에 부합하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 질문 및 의사소통 활용	효과적 질문 및 의사소통을 수반하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	5. 평가 방법 및 절차 마련	평가 목적에 부합하는 평가 방법 및 절차 마련하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	6. 평가 도구 개발	평가 계획에 준하는 적절한 평가 도구 개발하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	7. 평가 결과 활용	수업 개선 및 학습 처치에 유용하도록 평가 결과 활용하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
수업 상황	1. 도구 및 교구, 자료 활용	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료를 준비하여 활용하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 교실 환경 및 수업 집단 조성	공학적 도구, 교구, 자료 등의 효율적 활용을 위하여 적절한 수업 집단 및 교실 환경 조성하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습 태도 및 수업 분위기 조성	학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기 유도하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 학생 관리 및 수업 상황 대처	학습자의 어려움 및 질문 등을 합리적으로 처리하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			

따라서 이 수업 평가 틀은 교사가 자신의 수업 계획 및 진행, 그리고 반성을 통해 수업 개선은 물론, 더 나아가 교사 지식의 확장을 이끌 수 있도록 하는 데 도움을 줄 것이다. 이때 가급적 수업 후 즉각적으로 평가를 실시함으로써 자신의 수업 반성을 통하여 보다 수월하게 수업 개선이 이뤄질 수 있도록 한다. 또 학교 환경 및 수업 상황에 따라 동료 교사들과의 협력, 연구, 논의 등을 통하여 지속적으로 수업 개선을 도모하는 의지와 노력을 갖추도록 한다.

결론적으로 수업 평가 요소는 기본적으로 교사들이 어떤 지식을 보유하고, 그 지식을 토대로 수업을 계획하고 그 계획에 따라 수업을 실행하며, 더 나아가 반성 및 개선 여부에 활용되어야 한다. 만약 한 교사가 교과 내용, 학습자 이해, 교수 학습 방법 및 평가, 수업 상황 등에 관한 지식을 보유한다면, 수업 계획이나 수업 실행에서 교사의 보유된 지식이 고루 반영되어 드러나야 하며, 수업 반성의 측면도 마찬가지이다. 하지만 어떤 교사에 대해 지식 보유, 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성 부문을 동시에 판단하기는 무리이다. 일반적으로 지식 보유, 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성의 네 부문 중에서 가장 진단하기에 용이하고 필요한 부문은 수업 실행 부문일 것이며, 또한 간편한 수업 평가를 위해서는 수업 실행 부문에 초점을 두어 교사 스스로 자기 평가를 수행하는 것이 좋다.

한마디로 교사가 자신이 수학 및 수학 교육 관련 지식을 어느 정도 보유하고 있는가에 초점을 두어 진단하고자 할 때에는 이 부문만을 스스로 점검하도록 한다. 마찬가지로 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성 측면에 초점을 두어 진단하고자 할 때에는 해당 부문만을 선택하여 점검하도록 한다. 여기서 수업 계획과 수업 반성 측면의 평가 요소는 교사 자신의 교사 지식 및 전문성 향상을 위한 '자기 평가' 용으로 활용 가능하다. 한편 수업 실행 측면의 평가 요소는 교사 자신은 물론 동료 교사의 판단에 따라 진단 및 평가가 가능하다. 이때 평가 요소의 활용 단위(즉, 얼마만큼 수업을 진행한 후 평가를 할 것인가)는 교사의 수업 여건이나 상황에 따라 결정하도록 한다.

VIII. 교과서의 구성

01 편찬 방향

이 교과서는 새로 개정된 교육과정에 따라 학생들이 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 현상을 수학적으로 생각하고, 주어진 문제를 창의적이고 합리적으로 해결하는 능력을 기를 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 사항에 중점을 두고 엮었다.

첫째, 수학적 개념과 원리를 이해하고 기초 계산을 숙달하게 할 뿐만 아니라 문제 해결력을 기를 수 있도록 하였다.

둘째, 탐구 활동을 통하여 스스로 수학을 체험하게 하여 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 이해하도록 하였다.

셋째, 자신의 생각을 표현하고 토론하며, 다양한 방법으로 수학적 내용을 다른 사람에게 설명할 수 있는 의사소통 능력을 기를 수 있도록 하였다.

넷째, 흥미와 더불어 수학의 아름다움을 발견하고 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 하였다.

02 구성과 특징

■ 대단원 도입

단원과 관련된 사진을 제시하고, 사회 현상이나 자연 현상에서 관찰할 수 있거나 적용할 수 있는 이 단원의 수학 내용을 소개함으로써 단원 학습의 의미와 흥미를 불어넣어 주도록 하였다.

■ 준비 학습

각 대단원을 공부하는 데 꼭 필요한 선수 학습 요소와 이에 대한 문제를 제시함으로써 학습에 필요한 선행 지식을 상기하고 학습의 위계를 알 수 있도록 하였다.

■ 중단원 도입

실생활과 관련된 내용을 스토리텔링 형식으로 소개하고 수학적 사고를 유발하는 물음을 제시하여 학습 동기를 유발하도록 하였다.

■ 생각 열기

새로운 내용의 학습을 시작하면서 다른 교과나 실생활과 관련된 내용을 소개하여 학생들에게 학습에 대한 흥미를 불러일으키고 내용 전개의 실마리를 제공하였다. 또한 이를 통하여 수학의 가치와 유용성도 느끼고 창의적인 생각을 키울 수 있도록 스토리텔링 형식을 빌렸다.

■ 탐구 활동

창의력 기르기와 관련된 물음이나 수학적 사고를 유발할 수 있는 물음과 활동을 통하여 새로 도입할 수학의 원리나 개념을 탐구할 수 있도록 하였다.

■ 예제

학습 내용과 관련된 대표적인 문제와 그 풀이 과정을 함께 제시함으로써 학생들의 개념 이해를 더욱 탄탄히 하고 유사 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

■ 문제, 발전 문제, 실생활 문제

학습한 내용을 확인하는 기본 문제를 제시함으로써 학생들이 공부한 내용을 바르게 이해하였는지 스스로 점검할 수 있도록 하였다.

■ 창의 UP

생활 주변에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 원리와 법칙을 탐구하고, 수학의 개념을 깊이 생각해 보고 표현할 수 있게 하여 창의적인 생각을 기를 수 있도록 하였다.

■ 사고력 기르기(문제 해결, 추론, 의사소통)

여러 가지 문제를 창의적으로 해결하는 능력을 기르기 위해 생활 주변의 문제 상황을 탐색하고 해결하는 문제를 제시하였다. 또 수학적 사실을 분석하고 정당화하는 문제를 통하여 수학적으로 사고하고 추론하는 능력을 향상시킬 수 있도록 하였다. 더불어 수학적 개념을 말로 표현하고 토론해 보게 함으로써 다른 사람과 효율적으로 의사소통하는 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 단원 과제

중단원 도입과 관련된 구체적 문제를 통해 생활에 적용되는 수학을 직접 느낄 수 있도록 하였다.

■ 중단원 기초, 기본, 실력

중단원에서 학습한 내용에 대한 문제를 세 가지 수준으로 나누어 제시하였다. 기초에서는 중단원 학습 내용 중 최소 필수 내용을 확인하는 문제를 제공, 기본에서는 중단원 학습 내용 중 기본 개념을 확인하는 문제를 제공, 실력에서는 중단원 학습 내용을 완벽히 이해한 학생들의 수월성 교육에 이용하여 수준별 학습에 도움이 될 수 있도록 하였다.

■ 수행 과제

대단원에서 학습한 내용 중 탐구 소재를 선정하여 실험 또는 분석을 하거나 조사나 관찰을 하여 그 결과를 조직하고 표현함으로써 종합적인 문제 해결 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 대단원 학습 내용 정리

대단원 학습을 마친 후 이 단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하고, 새로 배운 용어와 기호를 제시함으로써 학습 내용을 스스로 점검하고 보완할 수 있도록 하였다.

■ 대단원 평가 문제

대단원 학습을 종합적으로 평가하기 위하여 다양한 유형의 평가 문항들을 제시하였다. 또 마지막 두 문제는 서술형으로 제시하여 수학적 표현 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 공학적 도구(컴퓨터, 계산기)의 활용

단원의 내용 중에서 공학적 도구를 의미 있게 활용할 수 있는 학습 주제를 선정하여 인터넷, 컴퓨터, 계산기 등을 활용하는 방법을 제시함으로써 학습자의 흥미를 높이고, 효과적인 수업이 될 수 있도록 하였다.

■ 수학 플러스

단원의 끝에 이 단원의 수학 원리와 관련된 과학, 기술, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 이야기 등을 소개함으로써 수학에 흥미를 불러일으키고, 단원의 학습에 대한 폭넓은 이해와 확장이 가능하도록 하였다.

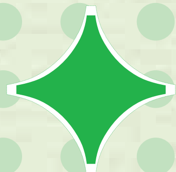
IX. 연간 지도 계획안

단원	중단원	차시	교과서 쪽수	지도 내용
Ⅰ. 다항식	1. 다항식의 연산	1～8	10～27	01 다항식의 덧셈과 뺄셈 02 다항식의 곱셈 03 다항식의 나눗셈 수준별 학습
	2. 나머지정리	9～14	28～41	01 항등식 02 나머지정리 수준별 학습
	3. 인수분해	15～19	42～51	01 인수분해 수준별 학습
	단원 마무리	20～21	52～57	
Ⅱ. 방정식과 부등식	1. 복소수와 이차방정식	22～31	58～81	01 복소수 02 이차방정식의 실근과 허근 03 판별식 04 근과 계수의 관계 수준별 학습
	2. 이차방정식과 이차함수	32～37	82～95	01 이차함수와 이차방정식의 관계 02 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 03 이차함수의 최대, 최소 수준별 학습
	3. 여러 가지 방정식	38～43	96～109	01 삼차방정식과 사차방정식 02 연립방정식 수준별 학습
	4. 여러 가지 부등식	44～49	110～123	01 부등식 02 이차함수와 이차부등식의 관계 수준별 학습
	단원 마무리	50～51	124～129	
Ⅲ. 도형의 방정식	1. 평면좌표	52～57	130～145	01 두 점 사이의 거리 02 선분의 내분과 외분 수준별 학습
	2. 직선의 방정식	58～65	146～161	01 직선의 방정식 02 두 직선의 평행과 수직 수준별 학습
	3. 원의 방정식	66～71	162～175	01 원의 방정식 02 원과 직선의 위치 관계 수준별 학습
	4. 도형의 이동	72～77	176～189	01 평행이동 02 대칭이동 수준별 학습
	5. 부등식의 영역	78～83	190～203	01 부등식의 영역 02 부등식의 영역에서의 최대, 최소 수준별 학습
	단원 마무리	84～85	204～209	

※ 위 계획안은 학교의 실정이나 학생들의 학습 속도 등에 따라 적절히 조정하여 운영할 수 있다.

X. 참고 문헌

- 강완, 백석윤(1998). 초등수학 교육론. 동명사.
- 교육과학기술부(2007). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2007-79호 별책 8).
- 교육과학기술부(2009). 2009 개정 교육과정 총론. 교육과학기술부 고시 제2009-41호.
- 교육과학기술부(2011). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2011-361호 별책 8).
- 신이섭 외(2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구. 한국과학창의재단 정책연구 2011-11.
- 이홍우(1999). 지식의 구조와 교과. 서울: 교육과학사.
- 임찬빈, 이화진, 곽영순, 강대현, 박영석(2004). 수업 평가 기준 개발 연구(Ⅰ): 일반 기준 및 교과(사회, 과학, 영어) 기준 개발. 한국교육과정평가원 연구 보고서 RRI 2004-5.
- 임찬빈, 이화진, 최승현, 오은순, 이경언, 이수정, 노은희, 권순달(2006). 수업 평가 기준 개발 연구(Ⅲ): 일반 기준 및 교과(국어, 수학, 기술·가정, 음악, 초등) 기준 상세화. 한국교육과정평가원 연구 보고서 RRI 2006-3.
- 조지민, 김명화, 최인봉, 송미영, 김수진(2007). 2006년 국가수준 학업성취도 평가 연구: 수학. 한국교육과정평가원 연구 보고 RRE 2007-3-4.
- 박선화, 김명화, 주미경(2010). 수학에 대한 정의적 특성 향상 방안 연구. 한국교육과정평가원 연구 보고 RRI 2010-9.
- 박순경(2010). 2009 개정 교육과정에 따른 교과 교육과정의 개선 방향 탐색. 2009 개정 교육과정에 따른 교과 교육과정 개선 방향 23-72. 국가교육과학기술자문위원회 교육과정위원회.
- 최승현(2002). 수학과 교육 내실화 방안 연구-좋은 수업 사례에 대한 질적 접근-. 한국교육과정평가원.
- 최승현, 황혜정(2007). 수학 수업 평가 기준 개발에 관한 기초 연구, 학교 수학, 9(3), pp.327~352.
- 황혜정, 김홍원, 박경미, 김수환, 김신영, 채선희(1997). 창의력 신장을 돕는 중학교 수학과 학습 평가 방법 연구. 한국교육개발원 연구 보고 CR 97-10-1.
- 황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽(2012). 수학교육학신론(2012 증보판). 문음사.
- 황혜정(2012). 수학 수업에서 요구되는 교사 지식에 대한 평가 기준 재탐색. 한국학교수학교육학회 시리즈 E 수학교육논문집, 26(1), pp.29~55.
- Charles, L., Lester, F., & O'Daffer, P.(1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc..
- Danielson Charlotte(1997). *A collection of Performance Tasks and Rubrics*: Middle School Mathematics. Larchmont, NY: Eye O Education, Inc..
- Driver, R., Asoko, H., Leach, J. Mortimer, E. & Scott, P.(1994). *Constructing scientific knowledge in the classroom*. Educational Researcher, 23, (7), 5-12.
- Greeno, J. G.(1978). *Nature of Problem Solving Abilities*, In W. K. Estes(Ed.). *Handbook of learning and cognitive process: Human Information Processing*(pp.239~270). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Krulick, S. & Rudnick, J. A.(1984). *A Sourcebook for Teaching Problem Solving*. Boston: Allyn and Bacon.
- National Council of Teachers of Mathematics(1989). *The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Mathematics Assessment*, In J. K. Stenmark(Ed.). Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*, In Frank Swetz and J. S. Hartzler(Eds.). Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Niss, M.(1989). *Aims and Scope of Applications and Modeling in Mathematics Curricula*, In W. Blum et. al.(Eds.), *Application and Modeling in Learning and Teaching Mathematics*(pp. 22~31). West Sussex: Ells Horwood Limited.
- Pólya, G.(1957), *How to Solve it*. 2nd ed., New York: Doubleday & Company, Inc..
- Vosniadou, S.(2001). *How children learn*. *Educational Practices series*. Monograph No. 7. International Bureau of Education(IBE).



기왕이면

‘미안해’ 라는 말보다

‘고마워’ 란 말이 더 좋아.

‘미안해’ 라고 하면 어쩐지 내가 뭘 잘못한 것 같지만

‘고마워’ 라고 하면 내가 뭔가 좋은 일을 한 것 같잖아.

– 미도리카와 세이지의 《맑은 날엔 도서관에 가자》 중에서 –

차례

각론

수학은 자연 현상을 설명하는 도구로서
대부분 다항식의 형태로 표현된다.

다항식

|준|비|학|습|

중① 문자와 식

1 다항식 x^2-3x+1에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 차수 2

(2) 상수항 1

(3) x의 계수 -3

중② 곱셈 공식

2 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a-2)^2$ a^2-4a+4

(2) $(a+b)(a-b)$ a^2-b^2

(3) $(x-2)(x+1)$ x^2-x-2

(4) $(2x+1)(x-3)$ $2x^2-5x-3$

중③ 인수분해 공식

3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) a^2-9 $(a+3)(a-3)$

(2) a^2+4a+4 $(a+2)^2$

(3) x^2+5x+6 $(x+2)(x+3)$

(4) $2x^2+5x+2$ $(2x+1)(x+2)$

단원의 지도 목표

1. 다항식의 연산

① 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.
② 다항식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.

2. 나머지정리

① 항등식의 의미를 이해하게 한다.
② 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

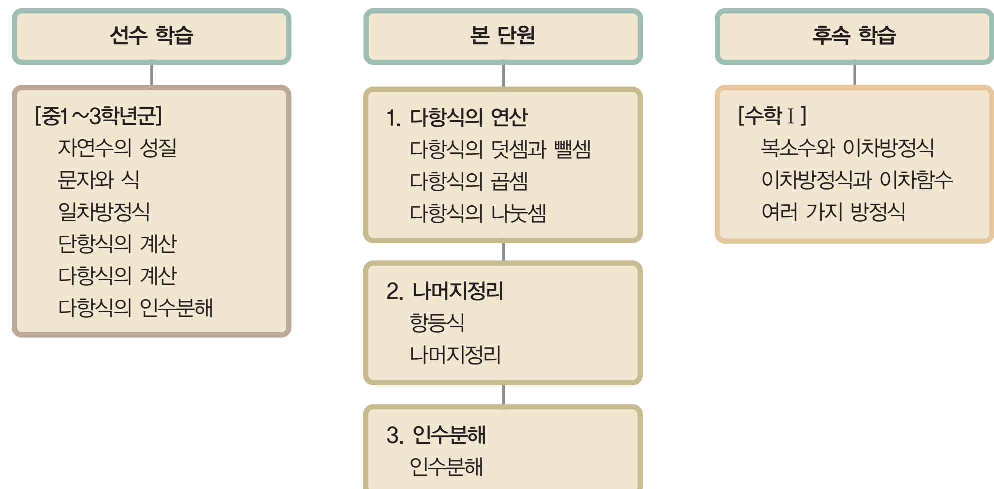
3. 인수분해

① 다항식의 인수분해를 할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 조립제법은 예를 통하여 그 방법을 간단히 다룬다.

교수 · 학습의 계열



단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~3	10~11	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 다항식의 연산	중단원 도입		12	• 문자의 사용과 수학의 발전	
	01 다항식의 덧셈과 뺄셈		13~15	• 다항식의 덧셈과 뺄셈	
	02 다항식의 곱셈	4~6	16~21	• 다항식의 곱셈 • 복잡한 다항식의 곱셈	
	03 다항식의 나눗셈	7	22~24	• 다항식의 나눗셈	
	수준별 학습	8	25~27	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 나머지정리	중단원 도입	9~10	28	• 등호 =의 의미	
	01 항등식		29~32	• 미정계수법	미정계수법
	02 나머지정리	11~13	33~38	• 나머지정리 • 인수정리 • 조립제법	나머지정리 인수정리 조립제법
	수준별 학습	14	39~41	• 중단원 확인 학습 문제	
3. 인수분해	중단원 도입	15~18	42	• 물의 분해와 인수분해	
	01 인수분해		43~48	• 인수분해 공식 • 복잡한 식의 인수분해 • 인수정리를 이용한 인수분해	
	수준별 학습	19	49~51	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		20~21	52~57	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 기호와 문자의 사용

알콰리즈미

대수라는 말이 사용된 최초의 책은 아라비아의 알콰리즈미(Al-Khwarizmi ; ?780～?850)의 대수책이고, 문자, 기호 및 계산을 이용하여 사고를 수행하고 문제 해결뿐만 아니라 증명까지지도 시도한 최초의 수학자는 16세기 프랑스 최고의 대수학자인 비에트(Viéte, F. ; 1540～1603)이다.

현재 우리가 사용하는 +, −, 소수점과 그 밖의 대수적 기호들이 사용된 것은 인류가 수를 인식하여 자연수를 사용하기 시작한 후 약 3000년의 세월이 흐른 15세기 이후의 일이다. 이때부터 수의 발달과 더불어 식을 간소화하고 간편하게 사용하려는 수학적 기호들은 대수학을 비약적으로 발전시켰다.

오늘날 우리들이 사용하는 덧셈 기호 '+', 뺄셈 기호 '−'는 비트만(Widmann, J. ; 1462～1498)이, 등호 '='는 레코드(Recorde, R. ; 1510～1558)가 처음 사용하였고, 오트레드(Oughtred, W. ; 1574～1660)는 곱셈 기호로 '×'를, 비례의 기호로 '::'를, 차의 기호로 '∼'를 사용하였다. 비를 나타내는 기호 ':'는 1651년 빈센트(Vincent, W. ; 1619～1668)가 처음으로 사용하였다. 기호 ÷는 10세기경에 사용된 것으로 기록되고 있다.

그리고 미지수를 나타내는 현대적인 형식은 데카르트(Descartes, R. ; 1596～1650)에 의해서 정립되었다. 그는 1637년의 저서 "기하학(Geometrie)"에서 알파벳 중 앞쪽 문자 a, b, c, ⋯ 등은 기지량으로, 뒤쪽 문자 x, y, z, ⋯ 등은 미지량으로 나타내고 있다.

2. 대수적 구조

기호와 수 체계의 확립으로 새로운 체계의 수학을 생각할 수 있게 되었다. 즉, 주어진 집합에 한 개 이상의 연산이 부여됨으로써 몇 가지 성질을 만족시키게 되었다. 이렇게 집합에 연산이 부여된 상태를 대수적 구조라 하고, 대표적인 대수적 구조에는 다음과 같은 것이 있다.

(1) 군(Group)

공집합이 아닌 집합 G에 대하여 이항연산 ∘이 정의되어 있고 다음 세 조건 G1～G3을 만족시킬 때 $(G, \circ)$를 군이라 하고, 간단히 '군 G'라고 한다.

G1. 임의의 $a, b, c \in G$에 대하여
$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (결합법칙)

G2. 임의의 $a \in G$에 대하여 $a \circ e = e \circ a = a$를 만족시키는 $e \in G$가 존재한다. 이때 e를 연산 ∘에 대한 항등원이라고 한다.

G3. 각각의 $a \in G$에 대하여 $a \circ x = x \circ a = e$를 만족시키는 $x \in G$가 존재한다. 이때 x를 연산 ∘에 대한 a의 역원이라 하고, a^{-1}로 나타낸다.

또 군 G가 다음 조건 G4를 만족시킬 경우 군 G를 Abel군(아벨군) 또는 가환군이라고 한다.

G4. 임의의 원소 $a, b \in G$에 대하여
$a \circ b = b \circ a$ (교환법칙)

이것은 수의 사칙연산의 기본 성질을 일반화하여 얻어진 것이다.

(2) 환(Ring)

집합 R 위에 두 이항연산 +와 ·이 정의되어 있고, 이 두 연산이 임의의 세 원소 $a, b, c \in R$에 대하여 다음 세 조건 R1～R3을 만족시킬 때 $(R, +, \cdot)$을 환이라고 한다.

R1. 군 $(R, +)$는 가환군이다.

R2. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ (결합법칙)

R3. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ (분배법칙)

또 환 $(R, +, \cdot)$이 다음 조건 R4를 만족시킬 경우 $(R, +, \cdot)$을 가환환이라고 한다.

R4. $a\cdot b=b\cdot a$ (교환법칙)

한편 환 R가 곱셈 $\cdot$에 대한 항등원 e를 가질 때, 즉 임의의 $a\in R$에 대하여 $a\cdot e=e\cdot a=a$인 $e\in R$가 존재할 때 e를 R의 단위원 (identity)이라 하고, 그 환을 단위원을 갖는 환이라고 한다. 그리고 덧셈 $+$에 대한 항등원 0을 영원이라고 한다.

(3) 체(Field)

단위원을 갖는 환 $(R, +, \cdot)$에서 $a\in R$에 대하여 곱셈 $\cdot$에 대한 역원 $a^{-1}\in R$가 존재할 때, 즉 $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=e$가 성립할 때, a를 단원(unit)이라고 하며 $R-\{0\}$의 모든 원소가 단원일 때, $(R, +, \cdot)$을 체라고 한다.

3. 다항식과 인수분해

대수적 구조 중에서 다항식을 원소로 가지는 다항식 환을 생각할 수 있다. 다항식 집합의 대수적 구조는 정수 집합과 똑같으며, 덧셈, 곱셈에 대하여 가환환을 이루고 있음을 쉽게 알 수 있다.

집합 F를 하나의 수체라 하고, 집합 F의 원소와 무관한 한 문자를 x라고 할 때

$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n\in F)$

을 집합 F 위의 다항식이라 하고, 그러한 다항식 전체의 집합을 $F[x]$로 나타낸다. 여기서 x는 여러 가지 값을 나타내므로 x를 변수라고 부른다.

다항식은 덧셈과 곱셈에 의한 변수에 대한 식의 표현이다. 다항식은 이와 같이 간단한 형태의 함수이기 때문에 다른 함수들을 연구하는 데 필수적이다.

현대 수학에서 다항식에 관한 연구는 가장 활발하게 이루어지고 있다. 다항식이 나타내는 도형을 연구하는 분야인 대수기하는 19세기 이후 수학의 중심 분야 중 하나이며, 힐베르트(Hilbert, D. ; 1862~1943)와 뇌터(Noether, A. E. ; 1882~1935)가 증명한 여러 결과들이 다항식 연구의 바탕이 되고 있다.

힐베르트

피타고라스(Pythagoras ; ?B.C. 569~?B.C. 475) 이후로 던져진 중요한 수학 문제들이 다항식으로 표현되며 이는 수에 관한 연구와 연결된다.

1802년 가우스(Gauss, K. F. ; 1777~1855)는 일차 이상의 다항식은 기약다항식의 곱으로 유일하게 인수분해된다는 것을 증명하였다.

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원	Ⅰ. 다항식	쪽수	교과서 10~13쪽
소단원	**1. 다항식의 연산** 01 다항식의 덧셈과 뺄셈	차시	1/21
학습 목표	다항식을 간단히 정리할 수 있다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 중학교에서 다루었던 문자와 식 단원의 용어인 항, 다항식, 상수항, 계수, 단항식, 차수, 일차식, 동류항, 대입에 대하여 복습한다. ◎ 중단원 도입 글을 읽고 단원 과제를 발문하여 이번 중단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다. ◎ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 다항식을 간단히 정리할 수 있다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◎ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. ◎ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◎ 학습 내용 설명 **다항식의 정리** (1) 내림차순: 특정 문자의 차수가 높은 항부터 낮아지는 순서로 나열하는 것 (2) 오름차순: 특정 문자의 차수가 낮은 항부터 높아지는 순서로 나열하는 것 예 다항식 x^2+x^3+5-x를 x에 대하여 내림차순으로 정리하면 x^3+x^2-x+5 오름차순으로 정리하면 $5-x+x^2+x^3$ ◎ 문제 1번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.	

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

대단원		I. 다항식	쪽수	교과서 14쪽
소단원		1. 다항식의 연산　01 다항식의 덧셈과 뺄셈	차시	2/21
학습 목표		다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◆ 이전 차시에서 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◆ 중학교에서 다루었던 다항식의 덧셈에 대하여 발문한다. ◆ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.		
전개	개념 학습 문제 해결	◆ 학습 내용 설명 **다항식의 덧셈과 뺄셈** (1) 다항식의 덧셈: 두 다항식 A, B에 대하여 덧셈 $A+B$는 A와 B의 각 항을 동류항끼리 모아서 정리한 것이다. (2) 다항식의 뺄셈: 두 다항식 A, B의 뺄셈 $A-B$는 B의 각 항의 부호를 바꾸어 A와 더한 것이다. ◆ 예제 01을 설명한다. ◆ 문제 2번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		괄호 앞에 '−' 기호가 있으면 괄호 안의 각 항의 부호가 바뀜에 유의하도록 한다.
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◆ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◆ 다음 차시를 예고한다. • 다항식의 덧셈에 대한 성질을 이해한다.		

1 다항식의 연산

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

② 다항식의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 다항식의 덧셈과 뺄셈	다항식의 덧셈과 뺄셈
02 다항식의 곱셈	다항식의 곱셈
	복잡한 다항식의 곱셈
03 다항식의 나눗셈	다항식의 나눗셈
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 12 쪽

1 다항식의 연산

문자의 사용과 수학의 발전

우리가 사는 세상은 수학으로 표현할 수 있는데, 특히 다항식은 수학이라는 언어를 이루는 단어라고 할 수 있다.

다항식의 미지수와 상수를 알파벳으로 나타내기 시작한 사람은 프랑스의 수학자 비에타(Viéta, F. ; 1540~1603)이고, 지금처럼 a, b, c를 상수로, x, y, z를 미지수로 처음 사용한 사람은 프랑스의 수학자 데카르트(Descartes, R. ; 1596~1650)이다. 문자와 기호를 사용하여 수를 나타낸 것은 인류가 수를 사용하기 시작한 때로부터 오랜 시간이 흐른 뒤였다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 15 쪽

실생활 문제를 다항식으로 어떻게 표현할 수 있을까?

들어 가면서 수학에서 문자와 식은 문제를 쉽고 간단하게 해결하는 데 도움이 되는 유용한 도구이다. 문자와 식을 사용하면 자연의 법칙을 수식으로 간단하게 정리하여 표현할 수 있다. 또한 수학적 사실을 간결하게 나타냄으로써 일반적인 경우로 추상화할 수 있게 된다.

이 단원에서는 다항식에서의 사칙연산을 다룬다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.	상	다항식의 덧셈과 뺄셈을 하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.
	하	문자를 하나만 포함한 두 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.
2. 다항식의 곱셈을 할 수 있다.	상	다항식의 곱셈에 대한 성질과 곱셈 공식을 이용하여 다항식의 곱셈을 하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	다항식의 곱셈에 대한 성질과 곱셈 공식을 이용하여 다항식의 곱셈을 할 수 있다.
	하	분배법칙을 이용하여 단항식과 다항식의 곱셈을 할 수 있다.
3. 다항식의 나눗셈을 할 수 있다.	상	다항식의 나눗셈과 그 결과에 대한 검산을 능숙하게 할 수 있다.
	중	다항식의 나눗셈을 할 수 있다.
	하	단항식으로 나누어떨어지는 다항식을 그 단항식으로 나눌 수 있다.

교과서 13 쪽

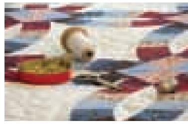
01 다항식의 덧셈과 뺄셈

● 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.

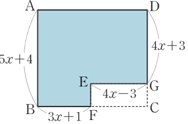
다항식의 덧셈과 뺄셈은 어떻게 하는가?

생각 열기 **퀼트**

퀼트는 천과 천 사이에 솜 또는 모사 등을 넣고 바느질을 하여 무늬를 두드러지게 하는 기법이다. 이러한 기법은 이불, 쿠션, 겨울용 의복 등의 생활용품뿐만 아니라 예술 작품에도 활용된다.



탐구 활동 **오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 천 ABCD에서 직사각형 EFCG를 잘라 내었다. 다음 물음에 답하여 보자.**



1. 선분 AD의 길이를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.
2. 선분 EF의 길이를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.
3. 1, 2를 이용하여 직사각형 ABCD와 직사각형 EFCG의 둘레의 길이를 각각 x에 대한 식으로 나타내어 보자.

● 다항식은 보통 내림차순으로 정리한다.

다항식을 정리할 때, 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 차례로 쓰는 것을 내림차순으로 정리한다고 하며, 차수가 낮은 항부터 차례로 쓰는 것을 오름차순으로 정리한다고 한다.

보기 다항식 x^2+x^3+5-x를 x에 대하여
(i) 내림차순으로 정리하면 x^3+x^2-x+5
(ii) 오름차순으로 정리하면 $5-x+x^2+x^3$

문제 1 다항식 $y^4+x^3+x^2y^3+3x-2xy+5$에 대하여 다음 물음에 답하여라.
(1) x에 대하여 내림차순으로 정리하여라.
(2) y에 대하여 오름차순으로 정리하여라.

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

소단원 지도 목표

① 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순 또는 오름차순으로 정리할 수 있게 한다.
② 다항식의 덧셈을 할 수 있게 한다.
③ 다항식의 뺄셈을 할 수 있게 한다.
④ 다항식의 덧셈에 대하여 교환법칙, 결합법칙이 성립함을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 다항식의 덧셈, 뺄셈은 동류항끼리 모아서 정리함을 알게 한다. 이때 차수가 높은 항부터 내림차순으로 정리한 다음 동류항을 간단하게 모으는 습관을 기르도록 지도한다.

생각 열기 참/고/자/료

퀼트는 '누비'라고도 하며 섬유 예술 작품을 전문적으로 전시하는 국내 유일의 박물관인 초전 섬유 퀼트 박물관에 가면 전통 조각보 기법을 비롯한 다양한 퀼트 작품을 볼 수 있다. 이 밖에 자세한 정보는 홈페이지 (http://www.jculture.co.kr/museum)에서 알아볼 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 주어진 직사각형 모양의 천의 둘레의 길이를 구하는 과정에서 다항식의 덧셈과 뺄셈의 필요성을 느끼도록 한다.

1. $(3x+1)+(4x-3)=\mathbf{7x-2}$

2. $(5x+4)-(4x+3)=\mathbf{x+1}$

3. 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$\{(7x-2)+(5x+4)\}\times2=(12x+2)\times2=\mathbf{24x+4}$$

직사각형 EFCG의 둘레의 길이는

$$\{(4x-3)+(x+1)\}\times2=(5x-2)\times2=\mathbf{10x-4}$$

1

목표| 주어진 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순 또는 오름차순으로 정리할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\mathbf{x^3+y^3x^2+(3-2y)x+y^4+5}$
(2) $\mathbf{x^3+3x+5-2xy+x^2y^3+y^4}$

주의| 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순이나 오름차순으로 정리할 때, 다른 문자는 상수로 취급하도록 지도한다.

본문 해설

❶ 다항식의 덧셈을 할 때, 다음 순서를 따른다.

(1) 괄호가 있는 것은 괄호 안을 먼저 계산한다.

(2) 각각의 다항식을 하나의 문자를 기준으로 내림차순으로 정리한다.

(3) 교환법칙과 결합법칙을 적절히 사용하여 동류항끼리 묶어서 정리한다.

❷ 실수의 덧셈과 같이 다항식의 덧셈에서도 교환법칙과 결합법칙이 모두 성립한다. 한편 교환법칙과 결합법칙은 다항식의 뺄셈에 대하여 성립하지 않는다.

(1) $A-B \neq B-A$

(2) $(A-B)-C \neq A-(B-C)$

교과서 14 쪽

이제 다항식의 덧셈과 뺄셈에 대하여 알아보자.

❶ 두 다항식 A, B에 대하여 덧셈 $A+B$는 A와 B의 각 항을 동류항끼리 모아서 정리한 것이다.

또 두 다항식의 뺄셈 $A-B$는 B의 각 항의 부호를 바꾸어 A와 더한 것이다.

중① 문자와 그 문자에 대한 차수가 같은 항을 동류항이라고 한다.

다항식의 뺄셈 $A-B=A+(-B)$

예제 01 두 다항식 $A=x^2-2xy+3y^2$, $B=3x^2+xy-4y^2$에 대하여 다음을 계산하여라.

(1) $A+B$　　(2) $A-B$

풀이 (1) $A+B=(x^2-2xy+3y^2)+(3x^2+xy-4y^2)$

$=(1+3)x^2+(-2+1)xy+(3-4)y^2$

$=4x^2-xy-y^2$

(2) $A-B=(x^2-2xy+3y^2)-(3x^2+xy-4y^2)$

$=(x^2-2xy+3y^2)+(-3x^2-xy+4y^2)$

$=(1-3)x^2+(-2-1)xy+(3+4)y^2$

$=-2x^2-3xy+7y^2$

답 (1) $4x^2-xy-y^2$　(2) $-2x^2-3xy+7y^2$

다른 풀이 다음과 같이 동류항끼리 세로로 맞추어 계산할 수도 있다.

$$\begin{array}{r} x^2-2xy+3y^2 \\ +\underline{)\,3x^2+\ xy-4y^2} \\ 4x^2-\ xy-\ y^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2-2xy+3y^2 \\ -\underline{)\,3x^2+\ xy-4y^2} \\ -2x^2-3xy+7y^2 \end{array}$$

문제 2 두 다항식 $A=2x^3-x+5$, $B=-x^3+4x^2+3x$에 대하여 다음을 계산하여라.

(1) $A+B$　　(2) $A+2B$

(3) $2A-B$　　(4) $-2A-3B$

다항식 A와 실수 k에 대하여 kA는 A의 각 항에 실수 k를 곱한 것이다.

일반적으로 다항식의 덧셈에 대하여 다음이 성립한다.

❷ **다항식의 덧셈에 대한 성질**

세 다항식 A, B, C에 대하여

(1) $A+B=B+A$　　[교환법칙]

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$　　[결합법칙]

다항식에서는 덧셈에 대한 결합법칙이 성립하므로 $(A+B)+C$와 $A+(B+C)$는 $A+B+C$와 같이 괄호를 사용하지 않고 나타낼 수 있다.

2

목표| 다항식의 덧셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $A+B=(2x^3-x+5)+(-x^3+4x^2+3x)$

$=(2-1)x^3+4x^2+(-1+3)x+5$

$=\mathbf{x^3+4x^2+2x+5}$

(2) $A+2B=(2x^3-x+5)+2(-x^3+4x^2+3x)$

$=(2-2)x^3+8x^2+(-1+6)x+5$

$=\mathbf{8x^2+5x+5}$

(3) $2A-B=2(2x^3-x+5)-(-x^3+4x^2+3x)$

$=(4+1)x^3-4x^2+(-2-3)x+10$

$=\mathbf{5x^3-4x^2-5x+10}$

(4) $-2A-3B=-2(2x^3-x+5)-3(-x^3+4x^2+3x)$

$=(-4+3)x^3-12x^2+(2-9)x-10$

$=\mathbf{-x^3-12x^2-7x-10}$

지/도/자/료

중학교에서 배운 다항식 관련 용어를 정확히 이해하고 있는지 확인한다.

- 항: 3, $-x$, $3ab$와 같이 수 또는 문자의 곱으로만 이루어진 식
- 상수항: 수만으로 이루어진 항
- 단항식: 하나의 항으로만 이루어진 식
- 다항식: 단항식의 합으로 이루어진 식
- 계수: 수와 문자의 곱으로 이루어진 항에서 문자 앞에 곱해진 수
- 동류항: 문자와 차수가 같은 항
- 차수: 항에 포함되어 있는 어떤 문자의 곱해진 개수

교과서 15 쪽

예제 **02** 세 다항식 $A=3x^2+xy$, $B=x^2-2xy+5y^2$, $C=2xy+y^2$에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

(1) $A+B=B+A$ (2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

풀이 (1) $A+B=(3x^2+xy)+(x^2-2xy+5y^2)$

$=(3+1)x^2+(1-2)xy+5y^2=4x^2-xy+5y^2$

$B+A=(x^2-2xy+5y^2)+(3x^2+xy)$

$=(1+3)x^2+(-2+1)xy+5y^2=4x^2-xy+5y^2$

따라서 $A+B=B+A$이다.

(2) $(A+B)+C=(4x^2-xy+5y^2)+(2xy+y^2)$

$=4x^2+(-1+2)xy+(5+1)y^2=4x^2+xy+6y^2$

$B+C=(x^2-2xy+5y^2)+(2xy+y^2)$

$=x^2+(-2+2)xy+(5+1)y^2=x^2+6y^2$

$A+(B+C)=(3x^2+xy)+(x^2+6y^2)$

$=(3+1)x^2+xy+6y^2=4x^2+xy+6y^2$

따라서 $(A+B)+C=A+(B+C)$이다.

문제 **3** 세 다항식 $A=x^2y-2xy^2+y^3$, $B=x^3-2x^2y-y^3$, $C=x^3+y^3$에 대하여 다음을 계산하여라.

(1) $3(A+B)-A$ (2) $(2A+B)+(C-A)$

발전 문제 **4** 두 다항식 $A=3x^3+2xy-y^2$, $B=x^3+x^2-2xy-5y^2$에 대하여 $A+B+C=x^2-y^2$을 만족시키는 다항식 C를 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

지면에서 수직 방향으로 초속 v_0 m로 던진 물체의 t초 후의 높이 h m는

$$h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \ (g\text{는 중력가속도})$$

과 같이 t에 대한 다항식으로 표현된다. 초속 20 m로 물체 A를 던지고 2초 후에 같은 속도로 물체 B를 던졌을 때, 다음 물음에 답하여라. (단, $g=10$으로 계산한다.)

(1) 물체 A를 던지고 x초 후의 두 물체 A, B의 높이를 각각 x에 대한 다항식으로 나타내어라. (단, $x\geq2$)

(2) 물체 A를 던지고 x초 후의 (물체 A의 높이)−(물체 B의 높이)를 x에 대한 다항식으로 나타내어라. (단, $x\geq2$)

4

목표| 다항식의 덧셈과 뺄셈을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 다항식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $A+B+C=x^2-y^2$에서

$C=x^2-y^2-(A+B)$이므로

$C=x^2-y^2-\{(3x^3+2xy-y^2)+(x^3+x^2-2xy-5y^2)\}$

$=x^2-y^2-(4x^3+x^2-6y^2)$

$=\mathbf{-4x^3+5y^2}$

3

목표| 다항식의 덧셈에 대한 성질을 이해하고, 세 개 이상의 다항식의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $3(A+B)-A$

$=2A+3B$

$=2(x^2y-2xy^2+y^3)+3(x^3-2x^2y-y^3)$

$=2x^2y-4xy^2+2y^3+3x^3-6x^2y-3y^3$

$=\mathbf{3x^3-4x^2y-4xy^2-y^3}$

(2) $(2A+B)+(C-A)$

$=A+B+C$

$=(x^2y-2xy^2+y^3)+(x^3-2x^2y-y^3)+(x^3+y^3)$

$=\mathbf{2x^3-x^2y-2xy^2+y^3}$

단원 과제

목표| 실생활 문제를 다항식을 이용하여 표현한 사례를 찾아보고 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 지면에서 수직 방향으로 초속 20 m로 던진 물체의 t초 후의 높이는

$$20t-\frac{1}{2}\times10\times t^2=20t-5t^2\text{(m)}$$

(1) 물체 A의 높이: $\mathbf{20x-5x^2}$(m)

물체 B의 높이: $20(x-2)-5(x-2)^2$

$=\mathbf{-5x^2+40x-60}$(m)

(2) (물체 A의 높이)−(물체 B의 높이)

$=20x-5x^2-(-5x^2+40x-60)$

$=\mathbf{-20x+60}$(m)

02 다항식의 곱셈

소단원 지도 목표

① 다항식의 곱셈에 대하여 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립함을 이해하게 한다.
② 중학교에서 배운 곱셈 공식을 이용하여 복잡한 다항식의 곱셈을 할 수 있게 한다.
③ 복잡한 모양의 곱셈 공식을 이해하고, 이를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 항이 세 개 이상인 두 다항식의 곱셈에서 괄호로 묶인 식을 하나의 문자로 생각하여 전개할 수 있도록 지도한다.
2. 주어진 다항식을 파악하여 적합한 곱셈 공식을 적용할 수 있도록 지도한다.

교과서 16 쪽

02 다항식의 곱셈

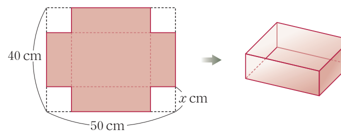
● 다항식의 곱셈을 할 수 있다.

다항식의 곱셈은 어떻게 하는가?

생각 열기 종이 공예

종이를 오리거나 접어서 여러 모양을 만드는 수공예를 종이 공예라고 한다. 종이 공예는 상업용 그릇, 백화점의 진열장 장식, 실내 장식, 무대 미술 등 여러 분야에서 그 미적 · 경제적 가치가 높아지고 있다.

탐구 활동 가로의 길이가 50 cm, 세로의 길이가 40 cm인 직사각형 모양의 종이가 있다. 다음 그림과 같이 네 귀퉁이를 한 변의 길이가 x cm인 정사각형 모양으로 잘라 내어 뚜껑이 없는 상자를 만들려고 한다. 물음에 답하여 보자.



1. 만들어진 상자의 밑면의 넓이를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.
2. 만들어진 상자의 부피를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.

탐구 활동에서 만들어진 상자의 밑면의 넓이와 부피는 각각

$$(50-2x)(40-2x)\ \text{cm}^2,\ (50-2x)(40-2x)x\ \text{cm}^3$$

이다.

이와 같은 다항식의 곱셈을 전개하는 방법에 대하여 알아보자.

두 다항식 A, B에 대하여 곱셈 AB는 지수법칙과 분배법칙을 이용하여 전개한 다음 동류항끼리 정리한 것임을 중학교에서 배웠다.

중② 지수법칙
m, n이 자연수일 때
(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$
(iii) $(ab)^m = a^m b^m$

생각 열기 참/고/자/료

종이 공예의 한 분야인 종이접기는 일본어로 '오리가미(Origami)'라고 부르는데 이 용어는 전 세계적으로 통용되고 있다. 특히 수학 분야에서 최근에 종이접기에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있는데, 종이를 접을 때 가위로 자르거나, 테이프로 붙이는 행위를 허용하지 않는 종이접기의 전통적인 규칙이 수학이나 과학 분야의 문제 해결에 유용하게 활용되기 때문이다. 사단법인 한국종이접기협회 홈페이지(http://origami.or.kr)에서 종이접기에 관한 다양한 정보를 얻을 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 다항식의 곱셈을 하기 위한 준비 단계로 상자의 부피를 구하는 과정에서 다항식끼리 곱셈을 써 보기 위한 것이다.

1. 만들어진 상자의 밑면의 두 변의 길이는 $(50-2x)$ cm, $(40-2x)$ cm이므로 상자의 밑면의 넓이는 $\boldsymbol{(50-2x)(40-2x)}$ cm^2
2. 만들어진 상자의 밑면의 넓이는 $(50-2x)(40-2x)$ cm^{2}이고 높이는 x cm이므로 상자의 부피는 $\boldsymbol{(50-2x)(40-2x)x}$ cm^3

일반적으로 다항식의 곱셈에 대하여 다음이 성립한다.

다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여
(1) $AB=BA$ [교환법칙]
(2) $(AB)C=A(BC)$ [결합법칙]
(3) $A(B+C)=AB+AC$
$(A+B)C=AC+BC$ [분배법칙]

다항식에서는 곱셈에 대한 결합법칙이 성립하므로 $(AB)C$와 $A(BC)$는 ABC와 같이 괄호를 사용하지 않고 나타낼 수 있다.

예제 01 세 다항식 $A=x+y$, $B=x-2y$, $C=3y$에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

(1) $AB=BA$ (2) $(AB)C=A(BC)$

문자와 문자, 문자와 수, 수와 수 사이의 '·'은 곱을 의미한다.
예 $x \cdot x = x \times x$

풀이 (1) $AB=(x+y)(x-2y)=x \cdot x+x \cdot (-2y)+y \cdot x+y \cdot (-2y)$
$=x^2-2xy+xy-2y^2=x^2-xy-2y^2$
$BA=(x-2y)(x+y)=x \cdot x+x \cdot y-2y \cdot x-2y \cdot y$
$=x^2+xy-2xy-2y^2=x^2-xy-2y^2$
따라서 $AB=BA$이다.
(2) $(AB)C=(x^2-xy-2y^2) \cdot 3y=x^2 \cdot 3y-xy \cdot 3y-2y^2 \cdot 3y=3x^2y-3xy^2-6y^3$
$BC=(x-2y) \cdot 3y=x \cdot 3y-2y \cdot 3y=3xy-6y^2$
$A(BC)=(x+y)(3xy-6y^2)=x \cdot 3xy+x \cdot (-6y^2)+y \cdot 3xy+y \cdot (-6y^2)$
$=3x^2y-6xy^2+3xy^2-6y^3=3x^2y-3xy^2-6y^3$
따라서 $(AB)C=A(BC)$이다.

문제 1 세 다항식 $A=x+2$, $B=x^2$, $C=x^2-3$에 대하여 $A(B+C)=AB+AC$가 성립함을 보여라.

문제 2 다음 식을 전개하여라.

(1) $(2x-1)(4x^2+x-2)$ (2) $(x+3y+4)(3x-2y+1)$

❶ $(A+B)(C+D+E)$

지/도/자/료 지수법칙

1. 중학교 수학 ②에서 다룬 지수법칙은 다음과 같다.
m, n이 자연수일 때
(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$
(2) $(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$
(3) $a \neq 0$에 대하여
$m>n$이면 $a^m \div a^n = a^{m-n}$
$m=n$이면 $a^m \div a^n = 1$
$m<n$이면 $a^m \div a^n = \dfrac{1}{a^{n-m}}$
(4) $(ab)^n = a^n b^n$
(5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$

2. 학생들이 지수법칙에서 다음과 같은 실수를 많이 하므로 유의하게 한다.
(1) $a^3 \times a^2 = a^{3 \times 2}$
(2) $a^3 \div a^2 = a^{3 \div 2}$
(3) $(a^3)^2 = a^{3^2}$
(4) $(3a)^2 = 3a^2$

3. n이 짝수일 때, $(-a)^n = a^n$
n이 홀수일 때, $(-a)^n = -a^n$

1

목표| 다항식의 곱셈에 대한 성질 중 분배법칙이 성립함을 확인할 수 있게 한다.

풀이| $A(B+C)=(x+2)\{x^2+(x^2-3)\}$
$=(x+2)(2x^2-3)$
$=2x^3-3x+4x^2-6$
$=2x^3+4x^2-3x-6$
$AB+AC=(x+2)x^2+(x+2)(x^2-3)$
$=x^3+2x^2+x^3-3x+2x^2-6$
$=2x^3+4x^2-3x-6$
따라서 $A(B+C)=AB+AC$이다.

2

목표| 다항식의 분배법칙을 이용하여 다항식을 전개할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(2x-1)(4x^2+x-2)$
$=8x^3+2x^2-4x-4x^2-x+2$
$=\mathbf{8x^3-2x^2-5x+2}$
(2) $(x+3y+4)(3x-2y+1)$
$=3x^2-2xy+x+9xy$
$-6y^2+3y+12x-8y+4$
$=\mathbf{3x^2+7xy+13x-6y^2-5y+4}$

본문 해설

❶ 다항식 $(A+B)(C+D+E)$를 분배법칙을 이용하여 전개하면 다음과 같다.
$(A+B)(C+D+E)$
$=A \cdot (C+D+E)+B \cdot (C+D+E)$
$=A \cdot C+A \cdot D+A \cdot E+B \cdot C+B \cdot D+B \cdot E$
실제의 계산에 있어서는 각 항을 분배하여 다음과 같이 계산하는 것이 편리하다.

$(A+B)(C+D+E)$

$=A \cdot C+A \cdot D+A \cdot E+B \cdot C+B \cdot D+B \cdot E$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 정사각형 모양의 색종이를 9개의 작은 직사각형으로 잘랐을 때, 자르기 전의 정사각형의 넓이와 9개의 직사각형 각각의 넓이의 합이 서로 같음을 확인함으로써 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$임을 이해하게 하려는 것이다.

1. 처음 색종이는 한 변의 길이가 $a+b+c$인 정사각형이므로 처음 색종이의 넓이는
$(a+b+c)(a+b+c)=\boldsymbol{(a+b+c)^2}$

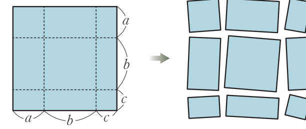
2. 9개의 직사각형 각각의 넓이의 합은
$a^2+ab+ca+ab+b^2+bc+ca+bc+c^2$
$=\boldsymbol{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

3. 처음 정사각형 모양의 색종이와 9개의 작은 직사각형의 넓이의 합은 같으므로
$\boldsymbol{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

교과서 18 쪽

복잡한 다항식의 곱셈은 어떻게 하는가?

탐구 활동 다음 그림과 같이 정사각형 모양의 색종이를 9개의 작은 직사각형으로 잘랐다. 물음에 답하여 보자.



1. 처음 색종이의 넓이를 식으로 나타내어 보자.
2. 9개의 작은 직사각형의 넓이의 합을 식으로 나타내어 보자.
3. 1과 2의 결과를 등식으로 나타내어 보자.

다항식의 곱셈은 분배법칙을 이용하여 전개할 수도 있지만 중학교에서 배운 다음과 같은 곱셈 공식을 이용하여 전개하면 더욱 편리하게 계산할 수 있다.

곱셈 공식 [1]
(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
(2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
(3) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
(4) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

예제 02 $(a+b+c)^2$을 전개하여라.

풀이 $(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2$
$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$
$=(a^2+2ab+b^2)+(2ac+2bc)+c^2$
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

답 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

읽/기/자/료 대수학

비에트

대수학이란 수학의 한 분야로 수를 대신하여 문자를 사용하거나 수학적 법칙을 간결하게 나타내는 학문이다. 16세기 유럽에서 대수학의 각 분야에 대한 급속한 진전이 시작되었는데, 그중에서 수학의 기호화에 큰 공을 세운 사람은 프랑스의 수학자 비에트(Viéte, F. ; 1540~1603)였다. 이전까지 방정식은 문장으로 나타내었는데, 비에트는 +, −를 사용하였고 미지수는 모음을 나타내는 문자로 표시하는 등 미지수와 계수를 문자로 나타내는 방정식을 사용하기 시작하였다. 이후 많은 수학자들이 더욱 편리한 기호의 개발에 노력을 쏟은 결과 현재 우리가 사용하는 계산 법칙이 나오게 된 것이다. 방정식을 푸는 것이 이 분야의 출발점이었으나 오늘날의 대수학은 수학의 기초 분야가 되었다.

기/초/력 향상 문제

다음 식을 전개하여라.

1 $(2a+1)^2$

2 $(a-3)^2$

3 $(a+1)(a-1)$

4 $(x+3)(x-2)$

5 $(2x-1)(x+3)$

답 **1** $4a^2+4a+1$ **2** a^2-6a+9 **3** a^2-1 **4** x^2+x-6 **5** $2x^2+5x-3$

교과서 19 쪽

문제 3 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a-b-2c)^2$ (2) $(2x-y+3)^2$

예제 03 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+y+3)(x+y-2)$ (2) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

풀이 (1) $x+y=X$로 놓으면

$$(x+y+3)(x+y-2)=(X+3)(X-2)$$
$$=X^2+X-6$$
$$=(x+y)^2+(x+y)-6$$
$$=x^2+2xy+y^2+x+y-6$$

(2) $a^2+b^2=X$로 놓으면

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=(X+ab)(X-ab)$$
$$=X^2-(ab)^2$$
$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$$
$$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$$
$$=a^4+a^2b^2+b^4$$

답 (1) $x^2+2xy+y^2+x+y-6$ (2) $a^4+a^2b^2+b^4$

문제 4 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x^2+x+2)(x^2+x-4)$ (2) $(a^2-b^2+1)(a^2+b^2-1)$

사고력 기르기

추론 / ▶의사소통 / 문제 해결

다항식 $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)$를 각자 다양한 방법으로 전개하여 그 과정을 친구들과 비교하고, 효과적으로 전개하는 방법에 대해 토의하여 보자.

3

목표| $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$임을 이용하여 식을 전개할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(a-b-2c)^2=a^2+(-b)^2+(-2c)^2+2\cdot a\cdot(-b)$
$+2\cdot(-b)\cdot(-2c)+2\cdot(-2c)\cdot a$
$=\boldsymbol{a^2+b^2+4c^2-2ab+4bc-4ca}$

(2) $(2x-y+3)^2=(2x)^2+(-y)^2+3^2+2\cdot 2x\cdot(-y)$
$+2\cdot(-y)\cdot 3+2\cdot 3\cdot 2x$
$=\boldsymbol{4x^2+y^2-4xy+12x-6y+9}$

참고| 예제 02와 같이 두 항을 괄호로 묶어 하나의 문자로 생각하고 전개할 수도 있지만
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
임을 기억해 두고, 이를 공식처럼 이용하면 편리하다.

4

목표| 주어진 식의 공통부분을 적당히 묶은 후 곱셈 공식을 활용하여 식을 전개할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2+x=X$로 놓으면
$(x^2+x+2)(x^2+x-4)$
$=(X+2)(X-4)$
$=X^2-2X-8$
$=(x^2+x)^2-2(x^2+x)-8$
$=x^4+2x^3+x^2-2x^2-2x-8$
$=\boldsymbol{x^4+2x^3-x^2-2x-8}$

(2) $b^2-1=X$로 놓으면
$(a^2-b^2+1)(a^2+b^2-1)$
$=\{a^2-(b^2-1)\}\{a^2+(b^2-1)\}$
$=(a^2-X)(a^2+X)$
$=(a^2)^2-X^2$
$=(a^2)^2-(b^2-1)^2$
$=a^4-(b^4-2b^2+1)$
$=\boldsymbol{a^4-b^4+2b^2-1}$

참고| 공통부분을 한 문자로 놓는 것을 치환이라고 한다.

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 네 개 이상의 다항식의 곱으로 이루어진 식을 전개할 때, 공통부분이 나오도록 교환법칙을 이용하여 전개하면 보다 효과적임을 알게 한다.

풀이| $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)$
$=(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)$ ← $x^2+x=X$
$=(X-2)(X-12)$
$=X^2-14X+24$
$=(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$
$=x^4+2x^3+x^2-14x^2-14x+24$
$=\boldsymbol{x^4+2x^3-13x^2-14x+24}$

5

목표| 분배법칙을 이용하여 식을 전개하는 여러 가지 방법을 알고, 곱셈 공식을 유도할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(a-b)^3$

$=(a-b)(a-b)^2$

$=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$

$=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$

$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$

$=\boldsymbol{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)$

$=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$

$=\boldsymbol{a^3-b^3}$

본문 해설

❶ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

에서 b 대신 $-b$를 대입하면

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

을 얻을 수 있다.

6

목표| 곱셈 공식을 이용하면 복잡한 모양의 식을 편리하게 전개할 수 있음을 알게 한다.

풀이| (1) $(x+3y)^3$

$=x^3+3\cdot x^2\cdot 3y+3\cdot x\cdot(3y)^2+(3y)^3$

$=\boldsymbol{x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3}$

(2) $(2a-3b)^3$

$=(2a)^3-3\cdot(2a)^2\cdot(3b)+3\cdot(2a)\cdot(3b)^2-(3b)^3$

$=\boldsymbol{8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3}$

(3) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)=(a+2b)\{a^2-a\cdot 2b+(2b)^2\}$

$=a^3+(2b)^3$

$=\boldsymbol{a^3+8b^3}$

(4) $(x-2)(x^2+2x+4)=(x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2)$

$=x^3-2^3$

$=\boldsymbol{x^3-8}$

교과서 20 쪽

이제 좀 더 복잡한 모양의 곱셈 공식을 유도하여 보자.

예제 04 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a+b)^3$ (2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

풀이 (1) $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$

$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$

$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$

$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$

$=a^3+b^3$

답 (1) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (2) a^3+b^3

문제 5 다음 식을 전개하여라.

(1) $(a-b)^3$ (2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **곱셈 공식 [2]**

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

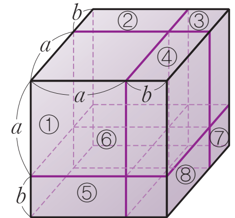
문제 6 다음 식을 전개하여라.

(1) $(x+3y)^3$ (2) $(2a-3b)^3$

(3) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$ (4) $(x-2)(x^2+2x+4)$

지/도/자/료 곱셈 공식과 정육면체의 부피

곱셈 공식 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$은 다음과 같이 정육면체의 부피를 이용하여 설명할 수 있다.



①의 부피: $a\times a\times a=a^3$

②의 부피: $a\times b\times a=a^2b$

③의 부피: $b\times b\times a=ab^2$

④의 부피: $b\times a\times a=a^2b$

⑤의 부피: $a\times a\times b=a^2b$

⑥의 부피: $a\times b\times b=ab^2$

⑦의 부피: $b\times b\times b=b^3$

⑧의 부피: $b\times a\times b=ab^2$

한 변의 길이가 $a+b$인 정육면체의 부피는 $(a+b)^3$이고, 나누어진 조각의 부피의 합은 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$이므로

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

❶ 곱셈 공식을 이용하면 여러 가지 식의 값을 쉽게 구할 수 있다.

예제 05 $x^2+y^2=5$, $x+y=3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) xy (2) x^3+y^3

풀이 (1) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$에서 $2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)$이므로

$$xy=\frac{1}{2}\{(x+y)^2-(x^2+y^2)\}=\frac{1}{2}(3^2-5)=2$$

(2) $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$에서

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2=(x+y)^3-3xy(x+y)=3^3-3\times2\times3=9$$

답 (1) 2 (2) 9

문제 7 $x-y=-5$, $xy=3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) x^2+y^2 (2) x^3-y^3

문제 8 $x^2+y^2=5$, $x-y=3$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $(x+y)^2$ (2) x^3-y^3

창의 UP $9\times111=(10-1)(10^2+10+1)=10^3-1$과 같이 101×9901을 10의 거듭제곱끼리의 연산으로 나타내고 곱셈 공식을 이용하여 그 값을 구하는 방법을 설명하여라.

본문 해설

❶ 곱셈 공식을 변형하면 거듭제곱과 관련된 식의 값을 구하는 데에 도움이 된다.

- 곱셈 공식의 변형

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

(3) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

7

목표| 곱셈 공식을 변형하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$=(-5)^2+2\times3$

$=25+6=\mathbf{31}$

(2) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(-5)^3+3\times3\times(-5)$

$=-125-45=\mathbf{-170}$

8

목표| 곱셈 공식을 변형하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$에서

$2xy=(x^2+y^2)-(x-y)^2$

$=5-3^2=-4$

이므로 $xy=-2$

(1) $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$

$=3^2+4\times(-2)=\mathbf{1}$

(2) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=3^3+3\times(-2)\times3$

$=27-18=\mathbf{9}$

창의 UP

출제 의도| 곱셈 공식을 활용하면 복잡한 두 수끼리의 곱을 번거로운 계산 없이 쉽게 구할 수 있는 경우가 있음을 알게 한다.

풀이| $(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$이므로

$101\times9901=(10^2+1)(10^4-10^2+1)$

$=(10^2)^3+1$

$=1000000+1$

$=\mathbf{1000001}$

03 다항식의 나눗셈

소단원 지도 목표

① 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 다항식의 나눗셈을 할 수 있게 한다.
② 나눗셈을 한 결과를 통해 나눗셈의 원리와 나머지의 차수에 대하여 이해하게 한다.
③ 다항식의 나눗셈의 원리를 이용하여 나눈 몫과 나머지가 주어질 경우 조건에 맞는 다항식을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 다항식의 나눗셈은 하나의 변수에 관한 다항식만을 취급한다. 또한 나누는 다항식의 계수가 정수이고 차수가 2차 이하인 간단한 경우만 다룬다.
2. 다항식의 나눗셈을 자연수의 나눗셈과 비교하면서 지도한다.

교과서 22 쪽

03 다항식의 나눗셈

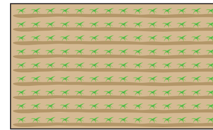
● 다항식의 나눗셈을 할 수 있다.

다항식의 나눗셈은 어떻게 하는가?

생각 열기 수학의 모태, 나일 강

나일 강의 범람이 없었다면 이집트 문명은 발생하지 않았을 것이라는 말이 있다. 나일 강은 매년 주기적으로 범람하였는데, 범람이 끝난 후 농지를 원래대로 복구하기 위하여 고대 이집트 문명에서는 측량술과 기하학이 특히 발달하였다.

탐구 활동 나일 강 주변에 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 밭이 있다고 할 때, 물음에 답하여 보자.



1. 밭의 세로의 길이가 4, 넓이가 124라고 할 때, 밭의 가로의 길이를 구하여 보자.
2. 밭의 세로의 길이가 $x-1$, 넓이가 x^3-1이라고 할 때, 밭의 가로의 길이를 구하는 식을 세워 보자.

탐구 활동에서 밭의 세로의 길이와 그 넓이가 주어지면 가로의 길이를 구할 수 있다. 즉, 밭의 세로의 길이가 $x-1$, 넓이가 x^3-1일 때 밭의 가로의 길이는

$$(x^3-1)\div(x-1)$$

이다.

생각 열기 참/고/자/료

고대 이집트인은 홍수로 나일 강이 범람한 후에 토지를 적절하게 재분배하기 위하여 측량이 필요하였다. 이와 같은 토지 측량에 의한 도형의 연구를 기하학의 기원으로 보고 있다. 기하학은 영어로 geometry라고 하는데, geo는 토지를, metry는 측량을 뜻한다.
이집트인의 도형에 관한 지식은 지중해를 건너 그리스로 전파되었는데, 경험적 지식을 쌓았던 이집트 인과는 대조적으로 추상적인 사고방식에 능했던 그리스 인은 도형에 대한 개념을 새로이 형성하고, 연역적(演繹的)으로 이를 논하였다. 특히 탈레스(Thales ; ?B.C. 624 ~?B.C. 546)와 피타고라스(Pythagoras ; ?B.C. 569 ~?B.C. 475)의 노력에 의해 기하학이 비약적으로 발전하였다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 직사각형 모양의 밭의 한 변의 길이와 넓이에 대한 정보가 주어졌을 때 나머지 한 변의 길이를 구하기 위해 다항식의 나눗셈을 이용하게 하려는 것이다.

1. 밭의 가로의 길이를 x라고 하면
(밭의 넓이)=(가로의 길이)×(세로의 길이)이므로
$124=x\times4$
$x=124\div4=31$
따라서 밭의 가로의 길이는 **31**이다.

2. 밭의 가로의 길이를 A라고 하면
(밭의 넓이)=(가로의 길이)×(세로의 길이)이므로
$x^3-1=A\times(x-1)$
따라서 $A=\mathbf{(x^3-1)\div(x-1)}$이다.

교과서 23 쪽

이제 이와 같은 다항식의 나눗셈을 하는 방법에 대하여 알아보자.

다항식을 다항식으로 나눌 때에는 두 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

❶ 예를 들어 다항식 $3x^2+7x+5$를 다항식 $x+2$로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{31} & \leftarrow \text{몫} \\ 12\,)\overline{375} & \\ 36 & \leftarrow 12\times3 \\ \hline 15 & \\ 12 & \leftarrow 12\times1 \\ \hline 3 & \leftarrow \text{나머지} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 3x\ +1 & \leftarrow \text{몫} \\ x+2\,)\overline{3x^2+7x+5} & \\ 3x^2+6x\quad\;\; & \leftarrow (x+2)\times3x \\ \hline x+5 & \\ x+2 & \leftarrow (x+2)\times1 \\ \hline 3 & \leftarrow \text{나머지} \end{array}$$

따라서 몫은 $3x+1$, 나머지는 3이므로

$$3x^2+7x+5=(x+2)(3x+1)+3$$

과 같이 나타낼 수 있다.

일반적으로 다항식의 나눗셈에 대하여 다음이 성립한다.

자연수 a를 자연수 b로 나눌 때의 몫을 q, 나머지를 r라고 하면 $a=bq+r$ (단, $0\le r<b$)

❷ **다항식의 나눗셈**

다항식 A를 다항식 B $(B\neq0)$로 나눌 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면

$A=BQ+R$ (단, (R의 차수)<(B의 차수))

특히 $R=0$이면 $A=BQ$이고 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

❸ **예제 01**

다항식 $A=3x^3+7x^2+1$을 다항식 $B=x^2+3x-1$로 나눈 몫 Q와 나머지 R를 구하고, 그 결과를 이용하여 $A=BQ+R$의 꼴로 나타내어라.

풀이

$$\begin{array}{r} 3x\ -2\qquad\qquad \\ x^2+3x-1\,)\overline{3x^3+7x^2\qquad+1} \\ 3x^3+9x^2-3x\quad\; \\ \hline -2x^2+3x+1 \\ -2x^2-6x+2 \\ \hline 9x-1 \end{array}$$

따라서 몫 Q는 $Q=3x-2$, 나머지 R는 $R=9x-1$이므로

$$3x^3+7x^2+1=(x^2+3x-1)(3x-2)+9x-1$$

답 $Q=3x-2$, $R=9x-1$, $3x^3+7x^2+1=(x^2+3x-1)(3x-2)+9x-1$

본문 해설

❶ 다항식을 일차식으로 나누면 나머지의 차수는 일차식의 차수보다 낮아야 하므로 나머지는 상수이다.

❷ 자연수의 나눗셈과 다항식의 나눗셈을 비교하면 다음과 같다.

(i) 두 자연수 a, b에 대하여 a를 b로 나누었을 때 몫을 q, 나머지를 r라고 하면

$a=bq+r$ (단, $0\le r<b$)

가 성립한다.

이때 $r=0$이면 a는 b로 나누어떨어진다고 한다.

(ii) 두 다항식 A, $B(B\neq0)$에 대하여 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면

$A=BQ+R$ (단, (R의 차수)<(B의 차수))

가 성립한다.

이때 $R=0$이면 A는 B로 나누어떨어진다고 한다.

❸ 다항식을 이차식으로 나눈 나머지는 일차식이거나 상수이다.

지/도/자/료

1. 다항식의 나눗셈은 다음과 같이 한다.

(1) (다항식)÷(단항식)인 경우

$$(P+Q)\div A=\frac{P+Q}{A}=\frac{P}{A}+\frac{Q}{A}$$

(2) (다항식)÷(다항식)인 경우

자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산하여 몫과 나머지를 구한다.

2. 다항식의 나눗셈을 이용하여

$(x-y)\cdot A=x^4-y^4$

이 성립하는 다항식 A를 구하면

$$\begin{array}{r} x^3+x^2y+xy^2+y^3\qquad\qquad \\ x-y\,)\overline{x^4\qquad\qquad\qquad\qquad-y^4} \\ x^4-x^3y\qquad\qquad\qquad\quad \\ \hline x^3y\qquad\qquad-y^4 \\ x^3y-x^2y^2\qquad\qquad \\ \hline x^2y^2\qquad-y^4 \\ x^2y^2-xy^3\quad\;\; \\ \hline xy^3-y^4 \\ xy^3-y^4 \\ \hline 0 \end{array}$$

이므로 $A=x^3+x^2y+xy^2+y^3$

같은 방법으로 $(x-y)\cdot B=x^5-y^5$이 성립하는 다항식 B를 구하면

$B=x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$

한편 다항식

$x+y$

x^2+xy+y^2

$x^3+x^2y+xy^2+y^3(=A)$

$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4(=B)$

에서 규칙성을 찾아 $(x-y)\cdot C=x^n-y^n$이 성립하는 다항식 C를 구하면

$C=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}$임을 알 수 있다.

교과서 24쪽

문제 1 다음 나눗셈의 몫 Q와 나머지 R를 구하고, 그 결과를 이용하여 $A=BQ+R$의 꼴로 나타내어라.

(1) $(x^3+x^2-2x+3)\div(x-1)$

(2) $(x^3-2x+1)\div(x^2+x+1)$

문제 2 다항식 A를 다항식 $x+2$로 나눈 몫이 $2x+1$, 나머지가 2일 때, 다항식 A를 구하여라.

발전 **문제 3** 다항식 x^3+3x^2+a를 다항식 x^2+x+b로 나눈 나머지가 $-x+1$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

사고력 기르기

▸추론
의사소통
문제 해결

두 다항식 $2x^3+x^2-1$과 x^2-1에 대하여 다음이 성립한다.

$$2x^3+x^2-1=(x^2-1)\cdot 2x+x^2+2x-1$$

이때 $2x^3+x^2-1$을 x^2-1로 나눈 나머지가 x^2+2x-1이 될 수 없는 이유를 설명하여 보자.

1

목표| 다항식의 나눗셈의 몫과 나머지를 구하고, 나눗셈의 원리를 확인할 수 있게 한다.

풀이| (1)

$$\begin{array}{r} x^2+2x \\ x-1\,\overline{)\,x^3+x^2-2x+3} \\ \underline{x^3-x^2} \\ 2x^2-2x+3 \\ \underline{2x^2-2x} \\ 3 \end{array}$$

$Q=\boldsymbol{x^2+2x}$, $R=\boldsymbol{3}$이므로

$\boldsymbol{x^3+x^2-2x+3=(x-1)(x^2+2x)+3}$

(2)

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x^2+x+1\,\overline{)\,x^3-2x+1} \\ \underline{x^3+x^2+x} \\ -x^2-3x+1 \\ \underline{-x^2-x-1} \\ -2x+2 \end{array}$$

$Q=\boldsymbol{x-1}$, $R=\boldsymbol{-2x+2}$이므로

$\boldsymbol{x^3-2x+1=(x^2+x+1)(x-1)-2x+2}$

2

목표| 다항식의 나눗셈의 원리를 이용하여 나눈 몫과 나머지가 주어질 경우 조건에 맞는 다항식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $A=BQ+R$에서 $B=x+2$, $Q=2x+1$, $R=2$이므로 $A=(x+2)(2x+1)+2=\boldsymbol{2x^2+5x+4}$

3

목표| 다항식의 나눗셈의 원리를 이용하여 조건에 맞는 다항식을 구할 수 있게 한다.

풀이|

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x^2+x+b\,\overline{)\,x^3+3x^2+a} \\ \underline{x^3+x^2+bx} \\ 2x^2-bx+a \\ \underline{2x^2+2x+2b} \\ (-b-2)x+a-2b \end{array}$$

나머지가 $-x+1$이므로

$(-b-2)x+a-2b=-x+1$

$-b-2=-1$, $a-2b=1$에서 $\boldsymbol{a=-1,\ b=-1}$

사고력 기르기 추론

출제 의도| 다항식을 이차식으로 나누면 나머지의 차수는 이차식보다 낮아야 하므로 나머지는 일차식 또는 상수가 되어야 함을 알게 한다.

풀이| 다항식 나눗셈에서 나누어떨어지지 않을 때에는 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 낮아질 때까지 계속 나누어야 한다. 주어진 다항식에서 x^2+2x-1은 x^2-1로 더 나누어질 수 있다.

즉, 다항식 $2x^3+x^2-1$을 이차식 x^2-1로 나눈 나머지는 일차 이하의 다항식이다.

따라서 다항식 $2x^3+x^2-1$을 x^2-1로 나누어 정리하면 $2x^3+x^2-1=(x^2-1)(2x+1)+2x$이므로 나머지는 $2x$이다.

교과서 25 쪽

중단원 기초

[해답 p.213]

수준별 학습

1 다항식 $2y^2+x^2y-y+3x^3-1$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) x에 대한 내림차순으로 정리하여라.
(2) y에 대한 오름차순으로 정리하여라.

01 다항식의 덧셈과 뺄셈 — 다항식의 정리

2 다음 식을 계산하여라.

(1) $(-x^2+3x+2)+(x^3-4x+3)$ (2) $(x^3-2x^2+2)-(-4x^3+x^2-2)$
(3) $(2x-1)(x^2+3x-1)$ (4) $x(x+1)(x^2-2)$

01 다항식의 덧셈과 뺄셈 / 02 다항식의 곱셈

3 다음 식을 전개하여라.

(1) $(2x+3y)^3$ (2) $(x-2y)^3$
(3) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$ (4) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

02 다항식의 곱셈 — 곱셈 공식

4 곱셈 공식을 이용하여 다음을 구하여라.

(1) $x+y=2$, $x^2-y^2=6$일 때, $x-y$의 값
(2) $a-b=3$, $ab=2$일 때, a^3-b^3의 값

02 다항식의 곱셈 — 곱셈 공식

5 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

(1) $(x^2+2x+3)\div(x-1)$
(2) $(x^3-x^2+2x-3)\div(x+1)$

03 다항식의 나눗셈

중/단/원 기초

1

목표| 주어진 다항식을 한 문자에 대하여 내림차순 또는 오름차순으로 정리할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\mathbf{3x^3+yx^2+2y^2-y-1}$

(2) $\mathbf{3x^3-1+(x^2-1)y+2y^2}$

2

목표| 다항식의 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(-x^2+3x+2)+(x^3-4x+3)$

$=\mathbf{x^3-x^2-x+5}$

(2) $(x^3-2x^2+2)-(-4x^3+x^2-2)=\mathbf{5x^3-3x^2+4}$

(3) $(2x-1)(x^2+3x-1)=\mathbf{2x^3+5x^2-5x+1}$

(4) $x(x+1)(x^2-2)=(x^2+x)(x^2-2)$

$=\mathbf{x^4+x^3-2x^2-2x}$

3

목표| 곱셈 공식을 이용하여 다항식을 전개할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(2x+3y)^3$

$=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot3y+3\cdot2x\cdot(3y)^2+(3y)^3$

$=\mathbf{8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3}$

(2) $(x-2y)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot2y+3\cdot x\cdot(2y)^2-(2y)^3$

$=\mathbf{x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3}$

(3) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)=x^3+(3y)^3$

$=\mathbf{x^3+27y^3}$

(4) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)=(2x)^3-y^3$

$=\mathbf{8x^3-y^3}$

4

목표| 곱셈 공식을 변형하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$이므로

$2(x-y)=6$, $x-y=\mathbf{3}$

(2) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=3^3+3\cdot2\cdot3=27+18=\mathbf{45}$

5

목표| 다항식의 나눗셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1)

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x-1\overline{)x^2+2x+3} \\ \underline{x^2-x} \\ 3x+3 \\ \underline{3x-3} \\ 6 \end{array}$$

→ 몫: $\mathbf{x+3}$
나머지: $\mathbf{6}$

(2)

$$\begin{array}{r} x^2-2x+4 \\ x+1\overline{)x^3-x^2+2x-3} \\ \underline{x^3+x^2} \\ -2x^2+2x-3 \\ \underline{-2x^2-2x} \\ 4x-3 \\ \underline{4x+4} \\ -7 \end{array}$$

→ 몫: $\mathbf{x^2-2x+4}$
나머지: $\mathbf{-7}$

교과서 26 쪽

중단원 기본

[해답 p.213]

수준별 학습

1 다음 표의 가로, 세로의 합이 모두 $3x^2-6x+9$가 되도록 빈칸에 알맞은 다항식을 써넣어라.

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

		$3x^3+4x^2+x+6$
$4x^3+5x^2+2x+7$	x^2-2x+3	
	$2x^3+3x^2+5$	

2 다음 식을 전개하여라.

02 다항식의 곱셈
복잡한 다항식의 곱셈

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
(2) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$
(3) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

3 $x-y=1$, $xy=3$일 때, $\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}$의 값을 구하여라.

02 다항식의 곱셈
곱셈 공식

4 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

03 다항식의 나눗셈

(1) $(2x^3-3x+1)\div(x^2+2)$
(2) $(2x^3-9x^2+17x-3)\div(x^2-3x+2)$

5 다항식 A를 다항식 x^2-3x-2로 나눈 몫이 $x+2$, 나머지가 $9x+3$일 때, 다항식 A를 구하여라.

03 다항식의 나눗셈

중/단/원 기본

1

목표| 다항식의 덧셈, 뺄셈을 이용하여 조건을 만족시키는 다항식을 구할 수 있게 한다.

풀이

A	B	$3x^3+4x^2+x+6$
$4x^3+5x^2+2x+7$	x^2-2x+3	C
D	$2x^3+3x^2+5$	E

위 표와 같이 빈칸의 다항식을 차례로 A, B, C, D, E라고 하면

$A=\mathbf{-x^3-3x+2}$
$B=\mathbf{-2x^3-x^2-4x+1}$
$C=\mathbf{-4x^3-3x^2-6x-1}$
$D=\mathbf{-3x^3-2x^2-5x}$
$E=\mathbf{x^3+2x^2-x+4}$

2

목표| 복잡한 꼴의 다항식의 곱셈을 전개할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$ ← $x^2+5x=X$
$=(X+4)(X+6)$
$=X^2+10X+24$
$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$
$=\mathbf{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}$

(2) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$
$=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$
$=(x^4-y^4)(x^4+y^4)=\mathbf{x^8-y^8}$

(3) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
$=\mathbf{x^3+y^3+z^3-3xyz}$

3

목표| 곱셈 공식을 변형하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{x^3-y^3}{xy}=\dfrac{(x-y)^3+3xy(x-y)}{xy}$
$=\dfrac{1^3+3\cdot3\cdot1}{3}=\mathbf{\dfrac{10}{3}}$

4

목표| 다항식의 나눗셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1)

```
          2x
x²+2 ) 2x³ − 3x + 1
       2x³ + 4x
           −7x + 1
```

→ 몫: $\mathbf{2x}$
나머지: $\mathbf{-7x+1}$

(2)

```
                2x  −3
x²−3x+2 ) 2x³ − 9x² + 17x − 3
          2x³ − 6x² +  4x
               −3x² + 13x − 3
               −3x² +  9x − 6
                        4x + 3
```

→ 몫: $\mathbf{2x-3}$
나머지: $\mathbf{4x+3}$

5

목표| 다항식의 나눗셈의 원리를 이용하여 나눈 몫과 나머지가 주어질 경우 조건에 맞는 다항식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $A=(x^2-3x-2)(x+2)+9x+3$
$=\mathbf{x^3-x^2+x-1}$

교과서 27 쪽

중단원 실력

[해답 p.213]

수준별 학습

1 두 다항식 $A=x^2-xy-2y^2$, $B=2x^2+xy-y^2$에 대하여 $A-2(X-B)=3A$를 만족시키는 다항식 X를 구하여라.

01 다항식의 덧셈과 뺄셈

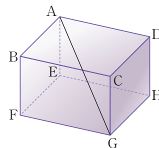
2 두 다항식 $(x^2+x+1)^3$, $(x^3+x^2+x+1)^3$을 전개한 식에서 x^2의 계수는 서로 같다. 그 이유를 설명하여라.

02 다항식의 곱셈 복잡한 다항식의 곱셈

3 두 양수 a, b에 대하여 $a^2+ab+b^2=7$, $a^2-ab+b^2=3$일 때, a^3+b^3의 값을 구하여라.

02 다항식의 곱셈 곱셈 공식

4 오른쪽 그림과 같은 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겉넓이는 24 cm^2이고, 모든 모서리의 길이의 합은 28 cm일 때, 상자의 대각선 AG의 길이를 구하여라.



02 다항식의 곱셈 곱셈 공식의 활용

5 다항식 $A=x^3-2x^2+ax+b$가 다항식 x^2+x+1로 나누어떨어질 때, 다항식 A를 x^2-2로 나눈 몫과 나머지를 구하여라.

03 다항식의 나눗셈

중/단/원 실력

1

목표| 다항식의 덧셈, 뺄셈을 이용하여 조건을 만족시키는 다항식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $A-2(X-B)=3A$에서 $X=-A+B$

$X=-A+B=-(x^2-xy-2y^2)+2x^2+xy-y^2$

$=\boldsymbol{x^2+2xy+y^2}$

2

목표| 다항식을 모두 전개하지 않아도 주어진 항의 계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $(x^3+x^2+x+1)^3$에서 $x^2+x+1=A$로 놓으면

$(x^3+x^2+x+1)^3=(x^3+A)^3$

$=x^9+3x^6A+3x^3A^2+A^3$

이므로 x^2이 나올 수 있는 항은 A^3뿐이다.

따라서 $(x^3+x^2+x+1)^3$의 x^2의 계수는

$A^3=(x^2+x+1)^3$의 x^2의 계수와 같다.

3

목표| 곱셈 공식을 변형하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $a^2+ab+b^2=7$ ······ ①

$a^2-ab+b^2=3$ ······ ②

①+②에서 $2(a^2+b^2)=10$, $a^2+b^2=5$

①−②에서 $2ab=4$, $ab=2$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=5+2\cdot2=9$

a, b는 양수이므로 $a+b=3$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=3^3-3\times2\times3=\boldsymbol{9}$

4

목표| 곱셈 공식을 활용하여 직육면체의 대각선의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 상자의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 a cm, b cm, c cm라고 하면

$2(ab+bc+ca)=24$에서 $ab+bc+ca=12$

$4(a+b+c)=28$에서 $a+b+c=7$

상자의 대각선 AG의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ cm이므로

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=7^2-2\times12=25$

따라서 상자의 대각선 AG의 길이는 **5 cm**이다.

5

목표| 다항식의 나눗셈을 할 수 있게 한다.

풀이|

$$\begin{array}{r} x-3 \\ x^2+x+1\,\overline{)\,x^3-2x^2+\quad ax+\ b} \\ \underline{x^3+\ x^2+\qquad x\qquad} \\ -3x^2+(a-1)x+\ b \\ \underline{-3x^2-\qquad 3x-\ 3} \\ (a+2)x+(b+3) \end{array}$$

따라서 $a=-2$, $b=-3$이다.

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^2-2\,\overline{)\,x^3-2x^2-2x-3} \\ \underline{x^3\qquad -2x\qquad} \\ -2x^2\qquad -3 \\ \underline{-2x^2\qquad +4} \\ -7 \end{array}$$

➡ 몫: $\boldsymbol{x-2}$
나머지: $\boldsymbol{-7}$

2 나머지정리

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 항등식의 의미를 이해하게 한다.

② 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 항등식	미정계수법
02 나머지정리	나머지정리
	인수정리
	조립제법
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 28 쪽

2 나머지정리

등호 =의 의미

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 38쪽

등식을 이용하여 복잡한 나눗셈의 나머지를 구할 수 있을까?

들어가면서 이 단원에서는 중학교에서 학습한 항등식의 개념을 바탕으로 나머지정리와 인수정리, 조립제법에 대해 학습한다.

이 단원에서 항등식을 다루는 이유는 나머지정리를 설명하기 위함이다. 나머지정리를 설명할 때 그 핵심은 일차식으로 나누면 나머지의 차수는 1보다 작으므로 결국 상수여야 한다는 점이다.

인수정리는 나머지정리의 특별한 경우이지만 실은 더 중요한 내용이고, (다항식)=0의 해를 하나 구하는 것과 그 다항식의 일차식인 인수를 찾아 인수분해하는 것은 같은 의미라는 것을 이해하면 다음 단원인 인수분해를 학습하는 데에 도움을 준다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준	성취 수준	
1. 항등식의 의미와 그 성질을 이해하고, 이를 활용하여 미정계수를 구할 수 있다.	상	항등식의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있다.
	중	항등식의 뜻은 알지만 항등식의 성질은 고려하지 않고, 적당한 수를 대입하여 미정계수를 구할 수 있다.
	하	주어진 등식이 항등식인지 판별할 수 있다.
2. 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	상	항등식의 성질을 이용하여 나머지정리를 이끌어내고, 나머지정리와 인수정리를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	나머지정리를 이용하여 다항식을 두 개의 일차식으로 인수분해되는 이차식으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.
	하	나머지정리를 이용하여 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.

01 항등식

● 항등식의 의미를 이해한다.

항등식을 이용하여 미지의 계수를 어떻게 구하는가?

생각 열기 **달력 속의 수학**

현재 우리가 사용하는 달력은 1582년 교황 그레고리우스 13세(Gregorius XIII ; 1502~1585)가 제정한 그레고리력으로, 이 달력에서 1년은 365.2425일이며 52.1775주이다. 달력에서는 다양하고 재미있는 수학적 규칙을 발견할 수 있는데, 이 규칙들은 1주일이 7일이라는 점과 밀접한 관련이 있다.

탐구 활동 **오른쪽 그림은 어느 해 3월의 달력이다. 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 18일을 기준으로 상하, 좌우, 대각선으로 이웃한 수들의 합을 각각 구하고, 그 값을 비교하여 보자.
2. x일을 기준으로 상하, 좌우, 대각선으로 이웃한 수들을 x를 사용하여 나타내어 보자.

탐구 활동에서 달력의 x일에 대하여 상하로 이웃한 수의 합 $(x-7)+(x+7)$과 좌우로 이웃한 수의 합 $(x-1)+(x+1)$은 항상 같다. 즉, 등식

$$(x-7)+(x+7)=(x-1)+(x+1)$$

은 x에 어떤 값을 대입하여도 성립하므로 항등식이다.

중① 주어진 식의 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식을 그 문자에 대한 항등식이라고 한다.

보기 등식 $(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$은 x에 대한 항등식이지만 등식 $x^2+1=2x$는 $x=1$일 때에만 성립하므로 항등식이 아니다.

새로 나온 용어와 기호

• 미정계수법(未定係數法, method of undetermined coefficients)

생각 열기 참/고/자/료

그레고리력은 오늘날 거의 모든 나라에서 사용하는 세계공통력이라고 할 수 있다.
교황 그레고리우스 13세의 초기 시대에는 율리우스력을 쓰고 있었는데, 율리우스력에서는 오랫동안 누적된 역법상의 오차로 원래는 3월 21일이어야 할 춘분이 달력에서는 3월 11일로 옮겨져 있었다. 그런데 춘분은 기독교에서 부활절을 정할 때 기준이 되는 날이었으므로, 이 10일간의 오차는 매우 골치 아픈 문제이었다. 결국 교황은 각 교회와 의논한 끝에 1582년 10월 5일부터 14일까지를 건너뛰고, 10월 4일의 다음 날을 10월 15일로 한다는 새 역법을 공포하였다. 이것이 현재까지 사용하는 그레고리력이다.

01 항등식

소단원 지도 목표

① 항등식의 의미를 이해하게 한다.
② 항등식의 성질을 설명할 수 있게 한다.
③ 미정계수법을 이용하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 어떤 등식이 x에 대한 항등식이면 x에 어떤 값을 대입하더라도 등식이 성립함을 강조한다.
2. 항등식의 뜻과 성질은 암기하지 않고, 이해하도록 지도한다.
3. 미정계수법에는 동류항의 계수를 비교하는 방법(계수비교법)과 문자에 특정한 수를 대입하는 방법(수치대입법)이 있음을 알게 하고, 주어진 문제에 따라 편리한 방법을 택하여 풀 수 있도록 지도한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 일상생활에서 사용하는 달력 속에 담겨진 수의 규칙을 살펴봄으로써 항등식의 개념을 생각하게 하려는 것이다.

1. 상하: $11+25=\mathbf{36}$
좌우: $17+19=\mathbf{36}$
대각선: $10+26=\mathbf{36}$
$12+24=\mathbf{36}$
상하, 좌우, 대각선으로 이웃한 수들의 합은 36으로 모두 같다.

2. 상하: $\boldsymbol{x-7,\ x+7}$
좌우: $\boldsymbol{x-1,\ x+1}$
대각선: $\boldsymbol{x-8,\ x+8}$
$\boldsymbol{x-6,\ x+6}$

교과서 30 쪽

문제 1 다음 등식 중에서 x에 대한 항등식을 모두 찾아라.

㉠ $x^2-9=(x+3)(x-3)$　　㉡ $x^2-2x=(x-1)^2-1$
㉢ $x(2x+1)=x^2+2x-6$　　㉣ $(x+1)^2-(x-1)^2=4x$

예제 01 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이 될 조건은 $a=b=c=0$임을 보여라.

풀이 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 x에 어떤 값을 대입하여도 등식이 항상 성립한다.

$x=0$을 대입하면　$c=0$　…… ①
$x=1$을 대입하면　$a+b+c=0$　…… ②
$x=-1$을 대입하면　$a-b+c=0$　…… ③

①, ②, ③에서　$a=0$, $b=0$, $c=0$
또 $a=b=c=0$이면 등식 $ax^2+bx+c=0$은 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 x에 대한 항등식이다.
따라서 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이 될 조건은 $a=b=c=0$이다.

문제 2 등식 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이 될 조건은 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$임을 보여라.

이상에서 다음을 알 수 있다.

❶ 항등식의 성질
(1) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$이다.
또 $a=0$, $b=0$, $c=0$이면 $ax^2+bx+c=0$은 x에 대한 항등식이다.
(2) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.
또 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이면 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$은 x에 대한 항등식이다.

1

목표| 등식 중에서 항등식을 찾을 수 있게 한다.

풀이| ㉠, ㉡, ㉣은 x에 어떤 실수를 대입하여도 항상 등식이 성립한다.
㉢에서 $x(2x+1)=x^2+2x-6$을 전개하여 정리하면
$2x^2+x=x^2+2x-6$, $x^2-x+6=0$
$x^2-x+6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}>0$
이므로 주어진 등식을 만족시키는 x는 존재하지 않는다.
즉, 항등식이 아니다.
따라서 항등식은 ㉠, ㉡, ㉣이다.

참고| 등호를 써서 두 수 또는 두 식이 같음을 나타내는 것을 등식이라고 하며 등식에는 항등식과 방정식이 있다. 즉,

등식 { 항등식 / 방정식

2

목표| 항등식의 의미를 이해하고, 항등식이 되기 위한 조건을 알게 한다.

풀이| 주어진 등식을 이항하여 정리하면
$(a-a')x^2+(b-b')x+(c-c')=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a-a'=0$, $b-b'=0$, $c-c'=0$
따라서 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.
또 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이면 주어진 등식은 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 x에 대한 항등식이다.
따라서 등식 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이 될 조건은
$a=a'$, $b=b'$, $c=c'$
이다.

본문 해설

❶ 일반적으로 n차인 등식
$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$
(a_0, a_1, $\cdots$, a_n은 상수)
이 x에 대한 항등식이 될 조건은
$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=a_0=0$
이다. 또
$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$
$=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$
이 x에 대한 항등식이 될 조건은
$a_n=b_n$, $a_{n-1}=b_{n-1}$, $\cdots$, $a_1=b_1$, $a_0=b_0$
이다.

한편 항등식의 성질을 이용하여 등식에서 미지의 계수를 정하는 방법을 **미정계수법**이라고 한다.

❶ 미정계수법에는 좌변과 우변의 동류항의 계수를 비교하여 미지의 계수를 정하는 방법과 문자에 특정한 수를 대입하여 미지의 계수를 정하는 방법이 있다.

양변의 계수를 비교하여 계수를 정하는 방법을 계수비교법, 문자에 특정한 수를 대입하여 계수를 정하는 방법을 수치대입법이라고 한다.

예제 02 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b의 값을 구하여라.

(1) $x^2-a(x-2)=x^2+3x+b$

(2) $(x-1)^2=(x-2)^2+a(x-2)+b$

풀이 (1) 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$x^2-ax+2a=x^2+3x+b$

양변의 계수를 비교하면 $-a=3$, $2a=b$

따라서 $a=-3$, $b=-6$이다.

(2) 양변에 $x=2$를 대입하면 $1=b$ …… ①

양변에 $x=1$을 대입하면 $0=1-a+b$ …… ②

①, ②에서 $a=2$, $b=1$

답 (1) $a=-3$, $b=-6$ (2) $a=2$, $b=1$

다른 풀이 (1) 양변에 $x=2$를 대입하면 $4=4+6+b$에서 $b=-6$ …… ①

양변에 $x=0$을 대입하면 $2a=b$ …… ②

①, ②에서 $a=-3$, $b=-6$

(2) 주어진 등식의 양변을 각각 전개하여 정리하면

$x^2-2x+1=x^2+(a-4)x-2a+b+4$

양변의 계수를 비교하면 $-2=a-4$, $1=-2a+b+4$

따라서 $a=2$, $b=1$이다.

문제 3 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 각각 구하여라.

(1) $x^2+(a-1)x-1=bx^2+c$

(2) $(x-2)(3x+1)=ax^2+bx+c$

(3) $a(x-1)^2+b(x-1)+c=2x^2-4x+7$

지/도/자/료

1. 어떤 등식이 다음 중에서 어느 하나의 뜻을 포함하면 그 등식은 x에 대한 항등식이다.

- x의 값에 관계없이 성립한다.
- 임의의 x에 대하여 성립한다.
- 모든 x에 대하여 성립한다.
- x가 어떤 값을 가지더라도 성립한다.

2. 수치대입법은 계수비교법으로 문제를 해결하기 어려운 경우에 사용될 수 있음을 다음 예를 통하여 알 수 있다.

$(x+1)(x-1)P(x)=x^4+ax+b$가 x에 대한 항등식이 되도록 a, b의 값을 정하여 보자.

이 경우 계수비교법을 이용하려면 좌변을 전개한 후 x에 대하여 정리해야 하는데 $P(x)$를 알 수 없으므로 곤란하다. 따라서 항등식이 되려면 x에 어떤 값을 대입하더라도 항상 성립해야 하므로 $P(x)$에 관계없이 좌변이 0이 되도록

$x=-1$을 대입하여 정리하면

$1-a+b=0$ …… ①

$x=1$을 대입하여 정리하면

$1+a+b=0$ …… ②

①과 ②를 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$

본문 해설

❶ 미정계수법에는 계수비교법과 수치대입법이 있다.

(1) 계수비교법: 「항등식의 양변의 같은 차수의 항의 계수는 같다」는 항등식의 성질을 이용하므로 전개하여 계수를 비교하면 된다.

(2) 수치대입법: 「항등식은 x에 어떤 값을 대입하여도 성립한다」는 항등식의 정의를 이용하는 방법으로 문자에 되도록 작은 값을 대입하여 얻은 연립방정식을 풀면 계산하는 데 편리하다.

따라서 문제에 맞게 두 가지 방법 중에서 편리한 방법을 택하는 것이 중요하다.

3

목표| 항등식의 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 양변의 계수를 비교하면

$1=b$, $a-1=0$, $-1=c$

$\boldsymbol{a=1,\ b=1,\ c=-1}$

(2) 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$3x^2-5x-2=ax^2+bx+c$

양변의 계수를 비교하면

$\boldsymbol{a=3,\ b=-5,\ c=-2}$

(3) 양변에 $x=1$을 대입하면

$c=2\cdot1^2-4\cdot1+7=5$

양변에 $x=0$을 대입하면 $a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+5=7$

$a-b=2$ …… ①

양변에 $x=2$를 대입하면 $a\cdot1^2+b\cdot1+5=7$

$a+b=2$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=2,\ b=0,\ c=5}$

4

목표| 다항식 A를 다항식 B로 나눈 몫을 Q, 나머지를 R라고 할 때, 등식 $A=BQ+R$가 항등식임을 알고, 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $2x^3+ax^2+bx+5$
$=(x^2-x+1)(2x+5)+3x$
$=2x^3+3x^2+5$
이 등식은 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면 $\boldsymbol{a=3,\ b=0}$

5

목표| 일상생활에서 일어나는 상황을 항등식으로 표현하고, 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 소민 서점에서 판매한 책의 권수는
$5x$
서현 서점에서 판매한 책의 권수는
$(x+2)a+(x-3)b$
두 서점에서 각각 판매한 책의 권수가 같으므로
$5x=(x+2)a+(x-3)b$
양변에 $x=-2$를 대입하면 $-10=-5b$, $b=2$
양변에 $x=3$을 대입하면 $15=5a$, $a=3$
따라서 $\boldsymbol{a=3,\ b=2}$이다.

교과서 32 쪽

발전 **문제 4** 다항식 $2x^3+ax^2+bx+5$를 다항식 x^2-x+1로 나눈 몫이 $2x+5$이고 나머지가 $3x$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

실생활 **문제 5** 어느 날 소민 서점은 x권이 한 묶음인 소설책 다섯 묶음을 팔았고, 서현 서점은 $(x+2)$권이 한 묶음인 만화책 a묶음과 $(x-3)$권이 한 묶음인 요리책 b묶음을 팔았다. 두 서점에서 그날 각각 판매한 책의 권수가 같을 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

다음 그림을 보고 자신의 생일을 이용하여 같은 방법으로 계산하고, 생일을 알아맞히는 원리를 식으로 나타내어 보자.

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 생일 알아맞히기 게임을 통해 항등식의 의미를 이해하게 한다.

풀이| 태어난 달을 x월, 태어난 날을 y일이라 하고 제시된 순서에 따라 계산을 하면
$10(10x-2)+y+20=100x+y$
가 되어 천의 자리와 백의 자리 수는 태어난 달, 십의 자리와 일의 자리 수는 태어난 날이 된다. 즉,
$501=100\times5+1$이므로 생일이 5월 1일임을 알 수 있다.

기/초/력 향상 문제

다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 각각 구하여라.

1 $ax+4=6x+b$

2 $3x^2-ax+7=bx^2+4x-c$

3 $a(x+1)+b=0$

4 $x^2+7=a(x-2)^2+bx+c$

답 **1** $a=6$, $b=4$ **2** $a=-4$, $b=3$, $c=-7$ **3** $a=0$, $b=0$ **4** $a=1$, $b=4$, $c=3$

교과서 33 쪽

02 나머지정리

● 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

나머지정리란 무엇인가?

생각 열기

배수 판정법

어떤 수를 직접 나누어 보지 않고도 그 수가 어떤 수의 배수인지를 판별할 수 있는 방법이 있다. 이를테면 홀수 번째 자리 숫자의 합에서 짝수 번째 자리 숫자의 합을 뺀 값이 11의 배수이면 그 수는 11의 배수이다.

마찬가지로 다항식을 일차식으로 나눌 때, 직접 나누지 않고도 그 나머지를 쉽게 구하는 방법이 있다.

탐구 활동

다항식 $P(x)=x^3+3x^2-1$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

● x에 대한 다항식을 일반적으로 나타내기 위해 $P(x)$를 사용한다. $P(x)$에서 P는 polynomial(다항식)의 첫 글자이다.

1. 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 몫 $Q(x)$와 나머지 R를 구하고, $P(x)=(x-1)Q(x)+R$의 꼴로 나타내어 보자.
2. 1에서 구한 등식이 항등식인지 아닌지를 판단하고 그 이유를 설명하여 보자.
3. 다항식 $P(x)$에 $x=1$을 대입하여 $P(1)$의 값을 구하고, 1에서 구한 나머지 R와 비교하여 보자.

탐구 활동에서 다항식 $P(x)=x^3+3x^2-1$을 $x-1$로 나누면 몫은 x^2+4x+4이고, 나머지는 3이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(x)=(x-1)(x^2+4x+4)+3$$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면 $P(1)=3$이 되고, 이것은 $P(x)=x^3+3x^2-1$을 $x-1$로 나눌 때의 나머지와 같다.

일반적으로 x에 대한 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R \text{ (}R\text{는 상수)}$$

이다. 이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=\alpha$를 대입하면 다음이 성립한다.

$$P(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q(\alpha)+R=R$$

즉, 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눈 나머지 R는 $P(\alpha)$와 같다.

이와 같이 다항식을 일차식으로 나눌 때의 나머지는 나눗셈을 직접 해 보지 않고도 쉽게 알 수 있다.

02 나머지정리

소단원 지도 목표

① 나머지정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

② 인수정리의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

③ 조립제법의 의미를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 인수정리는 나머지정리에서 나머지가 0인 경우이며 조립제법과 함께 삼차식, 사차식의 인수분해에 활용되며 이후의 방정식의 풀이에도 유용하게 쓰이므로 중요하게 다루도록 한다.

2. 조립제법은 다항식을 일차식으로 나눌 때 계수만을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있는 간편한 방법임을 알게 하고, 예를 통하여 그 방법을 간단히 다룬다.

새로 나온 용어와 기호

- 나머지정리 (remainder theorem)
- 인수정리 (因數定理, factor theorem)
- 조립제법 (組立除法, synthetic division)

생각 열기 참/고/자/료

배수 판정법

- 2의 배수: 일의 자리 숫자가 짝수인 수
- 3의 배수: 각 자리 숫자의 합이 3의 배수인 수
- 4의 배수: 끝 두 자리 숫자가 00이거나 끝 두 자리 숫자가 4의 배수인 수
- 5의 배수: 일의 자리 숫자가 0 또는 5인 수
- 6의 배수: 2의 배수이면서 3의 배수인 수
- 7의 배수: 끝 자리에서부터 $+1$, $+3$, $+2$, -1, -3, -2를 계속해서 곱한 수의 합이 7의 배수인 수
- 8의 배수: 끝 세 자리 숫자가 000이거나 끝 세 자리 숫자가 8의 배수인 수
- 9의 배수: 각 자리 숫자의 합이 9의 배수인 수
- 11의 배수: (홀수 번째 자리 숫자의 합)$-$(짝수 번째 자리 숫자의 합)이 11의 배수인 수

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 다항식의 나눗셈에서 몫과 나머지를 구하고, 등식에 수를 대입하여 나머지정리를 유도해 보기 위한 문제이다.

1. $Q(x)=x^2+4x+4$, $R=3$

$P(x)=(x-1)Q(x)+R$의 꼴로 나타내면

$\boldsymbol{x^3+3x^2-1=(x-1)(x^2+4x+4)+3}$

2. 모든 실수 x에 대하여 항상 등식이 성립하므로 항등식이다.

3. $P(1)=1^3+3\cdot1^2-1=3$

이때 1에서 구한 나머지가 3이므로 $\boldsymbol{P(1)=R}$

본문 해설

❶ 나머지정리는 일차식으로 나눌 때에만 성립하며, 나머지를 구할 때 편리한 방법으로, 몫은 구할 수 없다. 다항식 $P(x)$를 나누는 일차식의 꼴에 따라 나머지를 구하면 다음과 같다.

- $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나누면 나머지는 $P(a)$이다.
- $P(x)$를 일차식 $x+a$로 나누면 나머지는 $P(-a)$이다.
- $P(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누면 나머지는 $P\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

참고| $P(x)$를 일차식 $ax+b$로 나눈 나머지가 $P\left(-\frac{b}{a}\right)$라는 것의 의미는 $ax+b=0$인 x의 값을 $P(x)$에 대입했을 때의 $P(x)$의 값이 나머지라는 뜻이므로 기본적으로 나머지정리와 같은 맥락에서 바라볼 수 있다.

교과서 34 쪽

이상에서 다음과 같은 **나머지정리**를 얻는다.

> ❶ **나머지정리**
> x에 대한 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나눌 때의 나머지를 R라고 하면
> $R=P(a)$

보기 다항식 $P(x)=x^3-x^2+2x+3$을 $x-2$로 나눌 때의 나머지는

$P(2)=2^3-2^2+2\cdot2+3$
$=8-4+4+3$
$=11$

● $P(x)$
$=x^3-x^2+2x+3$
$=(x-2)(x^2+x+4)+11$

문제 1 다항식 $P(x)=x^3-5x^2+6x-4$를 다음 일차식으로 나눌 때의 나머지를 구하여라.
(1) $x+1$ (2) $x-2$

문제 2 다항식 $P(x)=x^3+ax^2+2x-1$을 $x-2$로 나눈 나머지가 -1일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

예제 01 다항식 $P(x)=4x^3-2x^2+5x-3$을 $2x-1$로 나눌 때의 나머지를 구하여라.

풀이 다항식 $P(x)$를 $2x-1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$P(x)=(2x-1)Q(x)+R$ (R는 상수)
$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$

R는 다항식 $P(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 나머지와 같으므로

$R=P\left(\frac{1}{2}\right)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\cdot\frac{1}{2}-3=-\frac{1}{2}$

답 $-\frac{1}{2}$

● 다항식 $P(x)$를 일차식 $ax-b$로 나눈 몫이 $Q(x)$일 때, $P(x)$를 $x-\frac{b}{a}$로 나눈 몫은 $aQ(x)$, 나머지는 $P\left(\frac{b}{a}\right)$이다.

1

목표| 나머지정리를 이용하여 나머지를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $P(x)=x^3-5x^2+6x-4$를 $x+1$로 나눈 나머지는

$P(-1)=(-1)^3-5\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)-4$
$=\mathbf{-16}$

(2) $P(x)=x^3-5x^2+6x-4$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$P(2)=2^3-5\cdot2^2+6\cdot2-4$
$=\mathbf{-4}$

2

목표| 나머지정리를 이용하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $P(x)=x^3+ax^2+2x-1$에서 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 -1이므로 나머지정리에 의하여

$P(2)=2^3+a\cdot2^2+2\cdot2-1=-1$

따라서 $a=\mathbf{-3}$이다.

지/도/자/료

1. 나머지정리와 인수정리는 다항식의 나눗셈에 대한 다음과 같은 성질이 그 바탕이 되어 있다. 두 다항식 $P(x)$, $A(x)$에 대하여
$P(x)=A(x)Q(x)+R(x)$
(단, ($R(x)$의 차수)<($A(x)$의 차수))
인 다항식 $Q(x)$, $R(x)$가 존재한다. 나머지정리는 $A(x)$가 일차식 $x-a$, 즉 $R(x)$가 상수인 경우와 관련된 성질이다.
2. 나머지정리와 인수정리는 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나눌 때, a가 복소수인 경우에도 성립하지만 여기에서는 실수인 경우만 다룬다.

문제 3 다항식 $P(x)=2x^3-3x-1$을 다음 일차식으로 나눌 때의 나머지를 구하여라.

(1) $2x-1$　　　(2) $3x+1$

예제 02 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는 -2이고, $x-2$로 나눈 나머지는 1이다. 다항식 $P(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눌 때의 나머지를 구하여라.

(나머지의 차수) <(나누는 다항식의 차수)

풀이 다항식 $P(x)$를 이차식 $(x+1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라고 하면 $R(x)$는 일차 이하의 다항식이므로

$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다. 즉,

$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$

다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -2이므로

$P(-1)=-a+b=-2$ ⋯⋯①

다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 1이므로

$P(2)=2a+b=1$ ⋯⋯②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$이므로

$R(x)=x-1$

답 $x-1$

문제 4 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 3이고, $x+3$으로 나눈 나머지는 -1이다. 다항식 $P(x)$를 $(x-1)(x+3)$으로 나눌 때의 나머지를 구하여라.

인수정리란 무엇인가?

탐구 활동 다항식 $P(x)=x^3-3x^2-x+3$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 나머지정리를 이용하여 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하여 보자.
2. 다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 몫이 $Q(x)$일 때, 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

$P(x)=\square\cdot Q(x)+\square$

3

목표| 다항식 $P(x)$를 일차식 $ax-b$로 나눈 나머지가 $P\left(\frac{b}{a}\right)$임을 이용하여 나머지를 구할 수 있게 한다.

풀이| 각각의 일차식으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R (R는 상수)라고 하면

(1) $P(x)=(2x-1)Q(x)+R$

$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R$

R는 다항식 $P(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나눈 나머지와 같으므로

$R=P\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\frac{1}{2}-1=\mathbf{-\frac{9}{4}}$

(2) $P(x)=(3x+1)Q(x)+R$

$=3\left(x+\frac{1}{3}\right)Q(x)+R$

R는 다항식 $P(x)$를 $x+\frac{1}{3}$로 나눈 나머지와 같으므로

$R=P\left(-\frac{1}{3}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-1=\mathbf{-\frac{2}{27}}$

4

목표| 다항식을 이차식으로 나눈 나머지는 일차 이하의 다항식임을 이해하고, 나머지정리를 이용하여 나머지를 구할 수 있게 한다.

풀이| 다항식 $P(x)$를 $(x-1)(x+3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라고 하면 $R(x)$는 일차 이하의 다항식이므로

$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다. 즉,

$P(x)=(x-1)(x+3)Q(x)+ax+b$

다항식 $P(x)$를 $x-1$, $x+3$으로 나눈 나머지는 각각 3, -1이므로

$P(1)=a+b=3$ ⋯⋯ ①

$P(-3)=-3a+b=-1$ ⋯⋯ ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

따라서 $R(x)=\mathbf{x+2}$이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 다항식의 나눗셈에서 나머지정리를 이용하여 일차식으로 나눈 나머지가 0이 되는 경우를 살펴봄으로써 인수정리를 이해하는 데에 도움을 주려는 것이다.

1. 다항식 $P(x)=x^3-3x^2-x+3$을 $x-1$로 나눈 나머지를 R라고 하면 나머지정리에 의하여

$R=P(1)=1^3-3\cdot1^2-1+3=\mathbf{0}$

2. 다항식 $P(x)=x^3-3x^2-x+3$을 $x-1$로 나눈 몫이 $Q(x)$, **1**에 의하여 나머지가 0이므로

$P(x)=\boxed{\mathbf{(x-1)}}\cdot Q(x)+\boxed{\mathbf{0}}$

지/도/자/료

다음 네 문장이 모두 같은 의미임을 이해하도록 지도한다.

'다항식 $P(x)$가 $x-a$로 나누어떨어진다.'

'다항식 $P(x)$가 $x-a$를 인수로 갖는다.'

'두 다항식 $P(x)$, $Q(x)$에 대하여 $P(x)=(x-a)Q(x)$이다.'

'다항식 $P(x)$에 대하여 $P(a)=0$이다.'

본문 해설

❶ 인수정리는 실제로 나눗셈을 하지 않고 인수를 가지는지를 판단하는 데 활용된다. 즉, x에 대한 다항식 $P(x)$에 대하여
① $P(a)=0$이면 $P(x)$는 $x-a$로 나누어떨어진다.
② $P(a)\neq 0$이면 $P(x)$는 $x-a$로 나누어떨어지지 않는다.

교과서 36 쪽

x에 대한 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-a$로 나눌 때, 나머지정리에 의하여 $P(a)=0$이면 $P(x)$는 $x-a$로 나누어떨어진다. 또 $P(x)$가 $x-a$로 나누어떨어지면 $P(a)=0$이 성립한다.

이상에서 다음과 같은 **인수정리**를 얻는다.

$P(x)$가 $x-a$로 나누어떨어진다는 것은 $x-a$가 $P(x)$의 인수임을 뜻하므로 인수정리라고 한다.

❶ **인수정리**
x에 대한 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(a)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다.
또 $P(x)$가 $x-a$로 나누어떨어지면 $P(a)=0$이다.

예제 03 다항식 $P(x)=x^3-6x+a$가 $x-1$로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값을 구하여라.

풀이 인수정리에 의하여 $P(1)=0$이므로

$$P(1)=1^3-6\cdot1+a=-5+a=0$$

따라서 $a=5$이다.

답 5

문제 5 다항식 $P(x)=x^3+2x^2+ax-5$가 $x+1$로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값을 구하여라.

문제 6 다항식 $P(x)=x^3+ax+b$가 x^2-x-2로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

발전 **문제 7** 다항식 $P(x)=x^4-2x^2+ax-b$는 $x+1$로 나누어떨어지고 $x-2$로 나눈 나머지가 3일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

5

목표| 인수정리를 이용하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 인수정리에 의하여 $P(-1)=0$이므로
$P(-1)$
$=(-1)^3+2\cdot(-1)^2+a\cdot(-1)-5$
$=-1+2-a-5$
$=-a-4$
$=0$
따라서 $a=$ **-4**이다.

6

목표| 인수정리를 이용하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 다항식 $P(x)=x^3+ax+b$를 x^2-x-2로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면
$P(x)=x^3+ax+b$
$=(x^2-x-2)Q(x)$
$=(x-2)(x+1)Q(x)$
$P(2)=2^3+2a+b=0$에서
$2a+b=-8$ …… ①
$P(-1)=(-1)^3+a\cdot(-1)+b=0$에서
$-a+b=1$ …… ②
①, ②를 연립하여 풀면 **$a=-3$, $b=-2$**

7

목표| 인수정리와 나머지정리를 이용하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 다항식 $P(x)=x^4-2x^2+ax-b$는 $x+1$로 나누어떨어지므로
$P(-1)=(-1)^4-2\cdot(-1)^2+a\cdot(-1)-b=0$에서
$a+b=-1$ …… ①
한편 다항식 $P(x)$는 $x-2$로 나눈 나머지가 3이므로
$P(2)=2^4-2\cdot2^2+a\cdot2-b=3$에서
$2a-b=-5$ …… ②
①, ②를 연립하여 풀면 **$a=-2$, $b=1$**

교과서 37 쪽

조립제법이란 무엇인가?

탐구 활동

다항식 $P(x)=2x^3-x^2-2x+3$을 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 나머지정리를 이용하여 나머지 R를 구하여 보자.

2. 항등식 $P(x)=(x-2)Q(x)+R$에서 미정계수법을 이용하여 $Q(x)$를 구하여 보자.

나머지정리를 이용하면 다항식을 일차식으로 나눌 때의 나머지는 쉽게 구할 수 있지만 몫은 구할 수 없다.

이제 다항식을 일차식으로 나눌 때 나머지뿐만 아니라 몫까지 쉽게 구하는 방법에 대하여 알아보자.

다항식 $2x^3-x^2-2x+3$을 일차식 $x-2$로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{rll} & 2x^2+3x+4 & \longleftarrow \text{몫} \\ x-2\,) & 2x^3-x^2-2x+3 & \longleftarrow 2\ (x^2\text{의 계수}) \\ & 2x^3-4x^2 & \\ \hline & 3x^2-2x+3 & \longleftarrow 3\ (x\text{의 계수}) \\ & 3x^2-6x & \\ \hline & 4x+3 & \longleftarrow 4\ (\text{상수항}) \\ & 4x-8 & \\ \hline & 11 & \longleftarrow \text{나머지} \end{array}$$

따라서 몫은 $2x^2+3x+4$이고, 나머지는 11이다.

이때 각 항의 계수만 생각하여 다음과 같이 몫과 나머지를 간단히 구할 수 있다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ & & 4 & 6 & 8 \\ \hline & 2 & 3 & 4 & 11 \end{array}$$

($\times 2$) 2: x^2의 계수, 3: x의 계수, 4: 상수항 → 몫, 11: 나머지

다항식을 일차식으로 나눌 때
- 나머지만 구하려면 나머지정리를 이용한다.
- 몫과 나머지를 구하려면 조립제법을 이용한다.

❶ 이와 같이 다항식을 일차식으로 나눌 때, 계수만을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법을 **조립제법**이라고 한다.

주의 조립제법에서 다항식의 각 항의 계수를 나열할 때, 계수가 0인 것도 반드시 표시하여야 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 조립제법을 이해하기 위한 준비 단계로 지금까지 배운 다항식의 나눗셈에서 몫과 나머지를 구하는 방법을 복습하기 위한 것이다.

1. $R=P(2)=2\cdot2^3-2^2-2\cdot2+3=\mathbf{11}$

2. 삼차식을 일차식으로 나눈 몫은 이차식이므로 $Q(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓을 수 있다.

또 **1**에 의하여 다항식 $P(x)=2x^3-x^2-2x+3$을 $x-2$로 나눈 나머지 R는 $R=11$이므로

$P(x)=2x^3-x^2-2x+3$

$\quad=(x-2)(ax^2+bx+c)+11$

$\quad=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c+11$

양변의 계수를 비교하면

$a=2$, $b=3$, $c=4$

따라서 $Q(x)=\mathbf{2x^2+3x+4}$이다.

본문 해설

❶ 조립제법은 다항식을 일차식으로 나눈 몫과 나머지를 구하는 방법으로 계수만을 이용한다.

삼차식 $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$을 $x-p$로 나눈 몫은 이차식이고, 나머지는 상수이다.

즉, 몫을 $b_2x^2+b_1x+b_0$, 나머지를 R로 놓으면

$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

$=(x-p)(b_2x^2+b_1x+b_0)+R$

$=b_2x^3+(b_1-pb_2)x^2+(b_0-pb_1)x$

$\quad+(R-pb_0)$

이때 계수를 비교하면

$a_3=b_2$, $a_2=b_1-pb_2$, $a_1=b_0-pb_1$,

$a_0=R-pb_0$

즉,

$b_2=a_3$, $b_1=a_2+pb_2$, $b_0=a_1+pb_1$,

$R=a_0+pb_0$

이것을 이용하여 조립제법으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} p & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & pb_2 & pb_1 & pb_0 \\ \hline & a_3 & a_2+pb_2 & a_1+pb_1 & a_0+pb_0 \\ & \| & \| & \| & \| \\ & b_2 & b_1 & b_0 & R \end{array}$$

몫: $b_2x^2+b_1x+b_0$ 나머지: R

8

목표 | 조립제법을 이용하여 나눗셈의 몫과 나머지를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1)

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ & & 6 & 9 & 30 \\ \hline & 2 & 3 & 10 & 31 \end{array}$$

몫: $\mathbf{2x^2+3x+10}$, **나머지: 31**

(2)

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 5 & 4 & 0 & 1 \\ & & -5 & 1 & -1 \\ \hline & 5 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

몫: $\mathbf{5x^2-x+1}$, **나머지: 0**

교과서 38 쪽

보기 조립제법을 이용하여 $2x^3+3x^2-5x-4$를 $x+2$로 나눈 몫과 나머지를 구하면

-2	2	3	-5	-4
		-4	2	6
	2	-1	-3	2

따라서 몫은 $2x^2-x-3$, 나머지는 2이다.

문제 8 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

(1) $(2x^3-3x^2+x+1)\div(x-3)$ (2) $(5x^3+4x^2+1)\div(x+1)$

예제 04 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

$$(4x^3-2x^2+5x-3)\div(2x-1)$$

$2x-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$임을 이용한다.

풀이 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여

$4x^3-2x^2+5x-3$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누면

$\frac{1}{2}$	4	-2	5	-3
		2	0	$\frac{5}{2}$
	4	0	5	$-\frac{1}{2}$

❶ $4x^3-2x^2+5x-3=\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2+5)-\frac{1}{2}$

$=(2x-1)\left(2x^2+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}$

따라서 $4x^3-2x^2+5x-3$을 $2x-1$로 나눌 때의 몫은 $2x^2+\frac{5}{2}$, 나머지는 $-\frac{1}{2}$이다.

답 몫: $2x^2+\frac{5}{2}$, 나머지: $-\frac{1}{2}$

문제 9 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라.

(1) $(2x^3-3x^2+x+4)\div(2x+3)$ (2) $(x^3+2x^2+3x+1)\div\left(\frac{1}{2}x+1\right)$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

자연수 n에 대하여 x^n을 $x-1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면 $x^n=(x-1)Q(x)+R$가 성립한다. 이를 이용하여 102^{100}을 101로 나눈 나머지를 구하여라.

본문 해설

❶ 다항식 $P(x)$를 $x+\frac{b}{a}\ (a\neq1)$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하고 다항식 $P(x)$를 $ax+b$로 나눌 때와 비교하면

$$P(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$$
$$=(ax+b)\frac{1}{a}Q(x)+R$$

이므로 $P(x)$를 $ax+b$로 나눌 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$, 나머지는 R이다.

즉, $P(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나눌 때와 $ax+b$로 나눌 때의 나머지는 서로 같지만 몫은 나눈 식의 일차항의 계수 a배만큼 차이가 난다.

따라서 조립제법을 이용하여 몫을 구할 때 나누는 수의 일차항의 계수가 1이 아닌 경우에는 조립제법을 이용하여 몫을 구한 후 일차항의 계수로 나누어 주어야 한다.

9

목표| 일차항의 계수가 1이 아닌 일차식으로 나눈 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구할 수 있게 한다.

풀이| (1)

$-\frac{3}{2}$	2	-3	1	4
		-3	9	-15
	2	-6	10	-11

$$2x^3-3x^2+x+4=\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2-6x+10)-11$$
$$=(2x+3)(x^2-3x+5)-11$$

따라서 몫은 $\boldsymbol{x^2-3x+5}$, 나머지는 $\boldsymbol{-11}$이다.

(2)

-2	1	2	3	1
		-2	0	-6
	1	0	3	-5

$$x^3+2x^2+3x+1=(x+2)(x^2+3)-5$$
$$=\left(\frac{1}{2}x+1\right)(2x^2+6)-5$$

따라서 몫은 $\boldsymbol{2x^2+6}$, 나머지는 $\boldsymbol{-5}$이다.

단원 과제

목표| 다항식의 나눗셈의 원리를 이용하여 복잡한 수에 대한 나눗셈에서 나머지를 간편하게 구할 수 있게 한다.

풀이| $P(x)=x^n$이라고 하면 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$R=P(1)=1^n=1$

즉, $x^n=(x-1)Q(x)+1$이 성립한다.

이 등식에 $x=102$, $n=100$을 대입하면

$102^{100}=101Q(102)+1$

따라서 102^{100}을 101로 나눈 나머지가 **1**임을 알 수 있다.

교과서 39 쪽

중단원 기초

[해답 p.214] 수준별 학습

1 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 각각 구하여라. (01 항등식 / 미정계수법)

(1) $2x-a-1=(b+3)x+3$

(2) $ax^2+x-3=x^2+bx+c$

(3) $3x^2-x+5=3(x-1)^2+a(x-1)+b$

2 다항식 $P(x)=x^3-x+3$을 다음 일차식으로 나눌 때의 나머지를 구하여라. (02 나머지정리)

(1) $x+1$　　(2) $x-2$

3 다음 일차식 중에서 다항식 x^3-7x+6의 인수인 것을 모두 찾아라. (02 나머지정리 / 인수정리)

㉠ $x-1$　㉡ $x+1$　㉢ $x-2$　㉣ $x+2$

4 다음 다항식이 $x+1$로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값을 구하여라. (02 나머지정리 / 인수정리)

(1) $x^2+ax+2a+1$

(2) $x^3-2ax^2+x+a-1$

5 조립제법을 이용하여 다음 나눗셈의 몫과 나머지를 구하여라. (02 나머지정리 / 조립제법)

(1) $(x^3-x^2+2x-8)\div(x+1)$

(2) $(3x^3-x^2-3x+2)\div(x-2)$

중/단/원 기초

1

목표| 항등식의 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 양변의 계수를 비교하면 $2=b+3$, $-a-1=3$
따라서 $\boldsymbol{a=-4}$, $\boldsymbol{b=-1}$이다.

(2) 양변의 계수를 비교하면 $\boldsymbol{a=1}$, $\boldsymbol{b=1}$, $\boldsymbol{c=-3}$

(3) 양변에 $x=0$을 대입하면
$5=3\cdot(-1)^2+a\cdot(-1)+b$, $-a+b=2$
양변에 $x=1$을 대입하면 $3-1+5=b$
따라서 $\boldsymbol{a=5}$, $\boldsymbol{b=7}$이다.

2

목표| 나머지정리를 이용하여 나머지를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $P(-1)=(-1)^3-(-1)+3=\boldsymbol{3}$

(2) $P(2)=2^3-2+3=\boldsymbol{9}$

3

목표| 인수정리를 이용하여 다항식의 인수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $P(x)=x^3-7x+6$이라고 하면

㉠ $P(1)=1^3-7\cdot1+6=0$

㉡ $P(-1)=(-1)^3-7\cdot(-1)+6=12\neq0$

㉢ $P(2)=2^3-7\cdot2+6=0$

㉣ $P(-2)=(-2)^3-7\cdot(-2)+6=12\neq0$

따라서 $P(x)$의 인수는 **㉠, ㉢**이다.

4

목표| 인수정리를 이용하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $P(x)=x^2+ax+2a+1$이라고 하면
$P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로
$P(-1)=(-1)^2+a\cdot(-1)+2a+1=0$
따라서 $\boldsymbol{a=-2}$이다.

(2) $P(x)=x^3-2ax^2+x+a-1$이라고 하면
$P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로
$P(-1)$
$=(-1)^3-2a\cdot(-1)^2+(-1)+a-1=0$
따라서 $\boldsymbol{a=-3}$이다.

5

목표| 조립제법을 이용하여 나눗셈의 몫과 나머지를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1)

-1	1	-1	2	-8
		-1	2	-4
	1	-2	4	-12

따라서 몫은 $\boldsymbol{x^2-2x+4}$, 나머지는 $\boldsymbol{-12}$이다.

(2)

2	3	-1	-3	2
		6	10	14
	3	5	7	16

따라서 몫은 $\boldsymbol{3x^2+5x+7}$, 나머지는 $\boldsymbol{16}$이다.

중/단/원 기본

1

목표| 항등식의 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2+3+2=2a$

양변에 $x=0$을 대입하면 $2=-b$

양변에 $x=1$을 대입하면 $2-3+2=2c$

따라서 $\boldsymbol{a=\frac{7}{2},\ b=-2,\ c=\frac{1}{2}}$이다.

2

목표| 항등식의 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $(m^2+m)a+(m-1)b+(m^2-1)c=2$

가 m의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$m=0$을 대입하면 $-b-c=2$

$m=1$을 대입하면 $2a=2$

$m=-1$을 대입하면 $-2b=2$

따라서 $\boldsymbol{a=1,\ b=-1,\ c=-1}$이다.

3

목표| 다항식을 이차식으로 나눈 나머지는 일차 이하의 다항식임을 이해하고, 나머지정리를 이용하여 나머지를 구할 수 있게 한다.

교과서 40 쪽

중단원 기본 [해답 p.214] 수준별 학습

1 등식 $2x^2-3x+2=ax(x-1)+b(x-1)(x+1)+cx(x+1)$이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c의 값을 각각 구하여라. 01 항등식 미정계수법

2 등식 $(m^2+m)a+(m-1)b+(m^2-1)c=2$가 m의 값에 관계없이 항상 성립하도록 상수 a, b, c의 값을 각각 구하여라. 01 항등식 미정계수법

3 다항식 $P(x)$를 $2x+4$, $x-\frac{2}{3}$로 나눈 나머지가 각각 3, 7일 때, 다항식 $P(x)$를 $(x+2)(3x-2)$로 나눌 때의 나머지를 구하여라. 02 나머지정리

4 다항식 $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$는 $x-1$로 나누어떨어지고 $x+2$로 나눈 나머지가 6일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라. 02 나머지정리 나머지정리와 인수정리

5 다음은 조립제법을 이용하여 x^3-x+4를 $x+2$로 나눌 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이다. $a+b+c+d+e$의 값을 구하여라. 02 나머지정리 조립제법

a	1	b	-1	4
		-2	d	e
	1	c	3	-2

풀이| 나머지정리에 의하여 $P(-2)=3,\ P\left(\frac{2}{3}\right)=7$

다항식 $P(x)$를 $(x+2)(3x-2)$로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라고 하면

$P(x)=(x+2)(3x-2)Q(x)+ax+b$

$P(-2)=-2a+b=3$ …… ①

$P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}a+b=7$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2},\ b=6$

따라서 구하는 나머지는 $\boldsymbol{\frac{3}{2}x+6}$이다.

4

목표| 인수정리와 나머지정리를 이용하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $P(1)=1+a+b+2=0,\ a+b=-3$ …… ①

$P(-2)=(-2)^3+a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+2=6$

$2a-b=6$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $\boldsymbol{a=1,\ b=-4}$

5

목표| 조립제법을 이용하여 나눗셈의 몫과 나머지를 구할 수 있게 한다.

풀이| $a=-2,\ b=0,\ c=-2,\ d=4,\ e=-6$

따라서 $a+b+c+d+e=\boldsymbol{-6}$이다.

중/단/원 실력

1

목표| 항등식의 의미를 이해하여 직선이 반드시 지나는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=(2k+1)x+4k-3$을 k에 대하여 정리하면

$(2x+4)k+x-y-3=0$

이 등식은 k에 대한 항등식이므로

$2x+4=0,\ x-y-3=0$에서 $x=-2,\ y=-5$

따라서 함수 $y=(2k+1)x+4k-3$의 그래프는 k의 값에 관계없이 점 $\mathbf{P(-2,\ -5)}$를 지난다.

교과서 41 쪽

중단원 실력

[해답 p.215]

수준별 학습

1 함수 $y=(2k+1)x+4k-3$의 그래프는 k의 값에 관계없이 점 P를 반드시 지난다고 한다. 이때 점 P의 좌표를 구하여라.

01 항등식 미정계수법

2 자연수 n에 대하여 다항식 $x^n(x^2-ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지가 $2^n(x-2)$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

01 항등식 미정계수법

3 이차식 $P(x)$에 대하여 $P(1-x)$는 $x-1$로 나눈 나머지가 -4이고, $xP(x)$는 $(x+1)(x-4)$로 나누어떨어진다. 이때 $P(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지를 구하여라.

02 나머지정리 나머지정리와 인수정리

4 다항식 $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)^{10}$을 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$로 나눈 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(-2)$의 값을 구하여라.

02 나머지정리

5 다항식 $P(x)=2x^3+x^2-3$을 $a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$의 꼴로 나타내었을 때, 상수 a, b, c, d의 값을 각각 구하여라.

02 나머지정리 조립제법

2

목표| 항등식의 의미를 이해하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $P(x)=x^2-ax+b$로 놓고

$x^nP(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^nP(x)=(x-2)^2Q(x)+2^n(x-2)$ …… ①

①의 양변에 $x=2$를 대입하면 $2^nP(2)=0$, $P(2)=0$이므로 $P(x)=x^2-ax+b=(x-2)(x-c)$ (c는 상수)로 놓을 수 있다.

$x^nP(x)=x^n(x-2)(x-c)$

$=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^n\}$

이므로 $x^n(x-c)=(x-2)Q(x)+2^n$

양변에 $x=2$를 대입하면 $2^n(2-c)=2^n$, $c=1$

$P(x)=x^2-ax+b=(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$

따라서 $\boldsymbol{a=3}$, $\boldsymbol{b=2}$이다.

3

목표| 나머지정리와 인수정리를 이용하여 나머지를 구할 수 있게 한다.

풀이| $P(1-x)$를 $x-1$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $xP(x)$를 $(x+1)(x-4)$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라고 하면

$xP(x)=(x+1)(x-4)Q_2(x)$

$P(1-x)=(x-1)Q_1(x)-4$

$P(0)=-4$, $P(-1)=P(4)=0$

이때 $P(x)$는 이차식이므로

$P(x)=a(x+1)(x-4)$에서 $a=1$

따라서 $P(x)=(x+1)(x-4)$이므로 $P(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는 $P(-2)=\boldsymbol{6}$이다.

4

목표| 나머지정리를 이용하여 나머지를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)^{10}$을 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)^{10}=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)Q(x)+ax+b$

$=\frac{1}{2}(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=1$을 대입하면 $0=a+b$

양변에 $x=-1$을 대입하면 $1=-a+b$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

따라서 $R(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이므로 $R(-2)=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$이다.

5

목표| 조립제법의 원리를 이용하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $P(x)=2x^3+x^2-3$을 $x-1$로 계속 나누어 보면

$P(x)=2x^3+x^2-3$

$=(x-1)(2x^2+3x+3)$

$=(x-1)\{(x-1)(2x+5)+8\}$

$=(x-1)^2(2x+5)+8(x-1)$

$=(x-1)^2\{2(x-1)+7\}+8(x-1)$

$=2(x-1)^3+7(x-1)^2+8(x-1)$

따라서 $\boldsymbol{a=2}$, $\boldsymbol{b=7}$, $\boldsymbol{c=8}$, $\boldsymbol{d=0}$이다.

3 인수분해

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 다항식의 인수분해를 할 수 있게 한다.

중단원의 구성

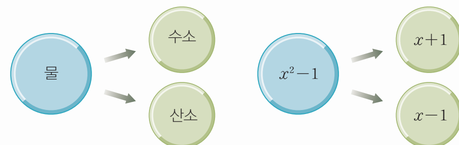
소단원명	지도 내용
01 인수분해	인수분해 공식
	복잡한 식의 인수분해
	인수정리를 이용한 인수분해
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 42 쪽

3 인수분해

물의 분해와 인수분해

생명체가 살아가는 데 있어서 중요한 물질인 물은 전기 에너지로 반응을 일으키면 수소와 산소로 분해된다. 마찬가지로 다항식 x^2-1은 인수분해를 이용하여 두 다항식 $x+1$, $x-1$의 곱으로 나타낼 수 있다. 즉, $x^2-1=(x+1)(x-1)$이다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 48쪽

인수분해를 이용하여 복잡한 계산을 쉽게 할 수 있을까?

들어가면서 인수분해의 목적은 어떤 원소를 더 기초적이고 간단한 조각으로 분해하는 데에 있다. 즉, 수를 소수들의 곱으로, 다항식을 더 이상 인수분해되지 않는 다항식들의 곱으로 분해하는 것이다. 이 원리는 방정식을 푸는 데 중요한 도구로 사용되는데, '복소수를 계수로 갖는 일차 이상의 방정식은 반드시 복소수 근을 갖는다.'는 대수학의 기본 정리와 밀접한 관련이 있다.

이 단원에서는 중학교에서 학습한 인수분해의 개념을 바탕으로 인수분해 공식과 인수정리를 이용하여 복잡한 식을 인수분해하는 방법에 대하여 학습한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 다항식의 인수분해를 할 수 있다.	상	여러 가지 다항식을 인수분해 공식, 치환, 인수정리 등을 이용하여 능숙하게 인수분해를 할 수 있다.
	중	인수분해 공식 또는 인수정리를 이용하여 다항식의 인수분해를 할 수 있다.
	하	인수분해 공식을 바로 적용할 수 있는 간단한 다항식의 인수분해를 할 수 있다.

교과서 43 쪽

01 인수분해

● 다항식의 인수분해를 할 수 있다.

인수분해란 무엇인가?

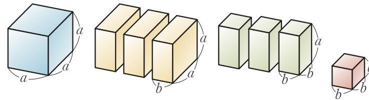
생각 열기

정육면체 분할 퍼즐

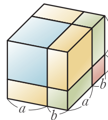
정육면체를 분할한 조각으로 이루어진 퍼즐에는 여러 가지가 있다. 그중 덴마크의 물리학자 피에트 헤인(Piet Hein : 1905~1996)이 개발한 소마 큐브는 오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 3개 또는 4개로 조합된 7개의 블록으로 $3\times3\times3$ 정육면체를 비롯한 여러 가지 모양을 만드는 퍼즐이다.

탐구 활동

다음 그림과 같이 직육면체 퍼즐 조각 8개가 있다. 물음에 답하여 보자.



1. 이 조각들의 부피의 합을 식으로 나타내어 보자.
2. 주어진 조각으로 오른쪽 그림과 같은 정육면체를 만들었을 때, 이 정육면체의 부피를 식으로 나타내어 보자.
3. 1과 2의 결과를 등식으로 나타내어 보자.



다항식 x^2+3x+2는 $x+1$과 $x+2$의 곱으로 나타낼 수 있다. 이와 같이 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것을 인수분해라고 함을 중학교에서 배웠다.

x^2+3x+2 ⇄ (인수분해 / 전개) $(x+1)(x+2)$

생각 열기 참/고/자/료

소마 큐브는 덴마크의 물리학자 피에트 헤인(Piet Hein)이 만든 입체 퍼즐로 1936년 대학 재학 중 '정육면체 모양의 조각 3개 또는 4개로 다양한 모양을 만든 조각들을 이용하여 다시 더 큰 모양의 정육면체를 만들 수 있을까?'라는 생각을 바로 실천으로 옮겨 만든 것이 시초이다.

소마 큐브의 '소마(soma)'는 미래 과학 소설 "용감한 신세계"에서 먹으면 기분이 좋아지지만 중독성이 있는 약의 이름이 '소마'인 것에서 유래하였다고 한다.

그 후로 소마 큐브는 퍼즐을 전문적으로 만드는 회사에서 제작, 판매되었는데 1970년 파커브라더스 사에서 제작한 소마 큐브가 당대에 엄청난 반향을 일으켰다.

01 인수분해

소단원 지도 목표

① 인수분해 공식을 이용하여 다항식을 인수분해하고 이를 활용할 수 있게 한다.

② 치환, 식의 변형, 인수정리, 조립제법 등을 이용하여 복잡한 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 곱셈 공식의 역의 과정으로 인수분해 공식을 유도할 수 있게 한다.

2. 인수분해는 계수의 범위에 따라 그 결과가 달라진다. 그러나 각 항의 계수에 대한 특별한 조건이 없으면 유리수 범위에서만 인수분해한다.

3. 인수분해는 주어진 다항식이 더 이상 인수분해되지 않을 때까지 다항식의 곱으로 나타내어야 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 8개의 직육면체 퍼즐 조각으로 하나의 정육면체를 만든 다음, 만들기 전후의 부피가 같다는 사실을 이용하여 다항식의 전개와 인수분해 사이의 관계를 이해하도록 하려는 것이다.

1. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

2. 한 변의 길이가 $a+b$인 정육면체이므로 이 정육면체의 부피는 $(a+b)^3$

3. 주어진 직육면체 퍼즐 조각 8개의 부피의 합과 조각으로 만든 정육면체의 부피는 같으므로
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

교과서 44 쪽

다음은 중학교에서 배운 인수분해 공식이다.

인수분해 공식 [1]

(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(2) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(3) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(4) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

인수분해는 다항식의 전개 과정을 거꾸로 생각한 것이므로 앞에서 배운 곱셈 공식으로부터 다음 인수분해 공식을 얻는다.

인수분해 공식 [2]

(1) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

❶ (2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

예제 01 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $a^3-6a^2+12a-8$ (2) $27x^3+8y^3$

❷ 이 단원에서는 계수가 유리수인 경우까지 인수분해하기로 한다.

풀이 (1) $a^3-6a^2+12a-8=a^3-3\cdot a^2\cdot 2+3\cdot a\cdot 2^2-2^3$

$=(a-2)^3$

(2) $27x^3+8y^3=(3x)^3+(2y)^3$

$=(3x+2y)\{(3x)^2-3x\cdot 2y+(2y)^2\}$

$=(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

답 (1) $(a-2)^3$ (2) $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

문제 1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x^3+9x^2+27x+27$ (2) $64a^3-48a^2+12a-1$

(3) $8x^3+y^3$ (4) a^3-27b^3

본문 해설

❶ $a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b+b^3$

$=a^2(a+b)-b(a^2-b^2)$

$=a^2(a+b)-b(a-b)(a+b)$

$=(a+b)\{a^2-b(a-b)\}$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

❷ 다항식의 인수분해는 계수의 범위에 따라 달라진다.

예를 들어 x^4-x^2-2는 유리수의 범위에서 인수분해하면

$(x^2-2)(x^2+1)$,

실수의 범위에서 인수분해하면

$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1)$,

복소수의 범위에서 인수분해하면

$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-i)(x+i)$

이다. 하지만 특별한 언급이 없는 경우 유리수의 범위에서 인수분해하기로 한다.

1

목표| 인수분해 공식을 이용하여 주어진 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^3+9x^2+27x+27$

$=x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3$

$=\mathbf{(x+3)^3}$

(2) $64a^3-48a^2+12a-1$

$=(4a)^3-3\cdot(4a)^2\cdot 1+3\cdot 4a\cdot 1^2-1^3$

$=\mathbf{(4a-1)^3}$

(3) $8x^3+y^3$

$=(2x)^3+y^3$

$=(2x+y)\{(2x)^2-(2x)\cdot y+y^2\}$

$=\mathbf{(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)}$

(4) a^3-27b^3

$=a^3-(3b)^3$

$=(a-3b)\{a^2+a\cdot(3b)+(3b)^2\}$

$=\mathbf{(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)}$

지/도/자/료 정수와 다항식의 인수분해

1. 정수의 인수분해

하나의 정수를 두 개 이상의 정수의 곱으로 나타내는 것이다. 특히 정수를 소인수분해하는 방법은 순서를 바꾸는 것을 제외하면 오직 한 가지뿐이다.

2. 다항식의 인수분해

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것이다. 일반적으로 다항식의 인수분해를 할 때에는 더 이상 인수분해할 수 없을 때까지 인수분해한다.

교과서 45 쪽

문제 2 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $2a^3+12a^2+24a+16$　　(2) $8a^4b-27ab^4$

복잡한 식의 인수분해는 어떻게 하는가?

탐구 활동 다음 물음에 답하여 보자.

1. 다항식 x^2-3x+2를 인수분해하여 보자.
2. x^2-3x+2에서 x 대신에 $a+b$를 넣어 등식을 만들어 보자.
3. 1의 결과에 x 대신 $a+b$를 넣어 2의 결과와 비교하여 보자.

탐구 활동의 다항식 $(a+b)^2-3(a+b)+2$에서 $a+b$를 X로 놓으면 인수분해 공식을 이용하여 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$(a+b)^2-3(a+b)+2=X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$$
$$=(a+b-1)(a+b-2)$$

예제 02 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $(x+4)^2-(x+4)-12$　　(2) x^4-8x^2-9

다항식에 공통부분이 있는 경우에는 공통부분을 한 문자로 바꾸어 인수분해하면 편리하다.

풀이 (1) $x+4=X$로 놓으면

$$(x+4)^2-(x+4)-12=X^2-X-12=(X+3)(X-4)$$
$$=(x+4+3)(x+4-4)=x(x+7)$$

(2) $x^2=X$로 놓으면

$$x^4-8x^2-9=X^2-8X-9=(X+1)(X-9)$$
$$=(x^2+1)(x^2-9)=(x^2+1)(x+3)(x-3)$$

답 (1) $x(x+7)$　(2) $(x^2+1)(x+3)(x-3)$

문제 3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $(x-1)^2+3(x-1)-10$　　(2) x^4-7x^2+12

(3) $(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+4$　　(4) $(x^2+6x)(x^2+6x-2)-8$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 공통부분을 묶으면 인수분해되는 다항식을 살펴봄으로써 복잡한 식을 인수분해하는 방법 중 치환에 의한 인수분해를 이해하는 데에 도움을 주고자 하는 활동이다.

1. $x^2-3x+2=\mathbf{(x-1)(x-2)}$

2. $\mathbf{x^2-3x+2=(a+b)^2-3(a+b)+2}$

3. $(x-1)(x-2)=\mathbf{(a+b-1)(a+b-2)}$

$(x-1)(x-2)$에서 x 대신에 $a+b$를 넣은 등식과 x^2-3x+2에서 x 대신에 $a+b$를 넣은 등식은 같으므로

$\mathbf{(a+b-1)(a+b-2)}$
$\mathbf{=(a+b)^2-3(a+b)+2}$

2

목표| 주어진 다항식을 공통인수로 묶은 후 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2a^3+12a^2+24a+16$

$=2(a^3+6a^2+12a+8)$

$=2(a^3+3\cdot a^2\cdot 2+3\cdot a\cdot 2^2+2^3)$

$=\mathbf{2(a+2)^3}$

(2) $8a^4b-27ab^4$

$=ab(8a^3-27b^3)$

$=ab\{(2a)^3-(3b)^3\}$

$=\mathbf{ab(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)}$

3

목표| 공통부분을 한 문자로 치환하여 복잡한 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x-1=X$로 놓으면

$(x-1)^2+3(x-1)-10$

$=X^2+3X-10=(X+5)(X-2)$

$=\{(x-1)+5\}\{(x-1)-2\}=\mathbf{(x+4)(x-3)}$

(2) $x^2=X$로 놓으면

x^4-7x^2+12

$=X^2-7X+12=(X-3)(X-4)$

$=(x^2-3)(x^2-4)=\mathbf{(x^2-3)(x+2)(x-2)}$

(3) $x^2-2x=X$로 놓으면

$(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)+4$

$=X^2-4X+4=(X-2)^2=\mathbf{(x^2-2x-2)^2}$

(4) $x^2+6x=X$로 놓으면

$(x^2+6x)(x^2+6x-2)-8$

$=X(X-2)-8=X^2-2X-8$

$=(X+2)(X-4)$

$=\mathbf{(x^2+6x+2)(x^2+6x-4)}$

참고| (2) x^4-7x^2+12처럼 x^2의 거듭제곱인 항으로만 이루어진 다항식을 복이차식이라고 한다.

4

목표| 주어진 다항식을 A^2-B^2의 꼴로 변형하여 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) x^4+x^2+25

$=x^4+10x^2+25-9x^2$

$=(x^2+5)^2-(3x)^2$

$=\mathbf{(x^2+3x+5)(x^2-3x+5)}$

(2) $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$

$=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$=\mathbf{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$

(3) $x^4+3x^2y^2+4y^4$

$=x^4+4x^2y^2+4y^4-x^2y^2$

$=(x^2+2y^2)^2-(xy)^2$

$=\mathbf{(x^2+xy+2y^2)(x^2-xy+2y^2)}$

(4) $x^4-6x^2y^2+y^4$

$=x^4-2x^2y^2+y^4-4x^2y^2$

$=(x^2-y^2)-(2xy)^2$

$=\mathbf{(x^2+2xy-y^2)(x^2-2xy-y^2)}$

교과서 46 쪽

공통부분이 없거나 인수분해 공식을 직접 이용하기 어려운 다항식은 식을 변형하여 인수분해하면 편리하다.

예제 03 다항식 x^4+x^2+1을 인수분해하여라.

풀이 $x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2$

$=(x^2+1)^2-x^2$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

답 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

문제 4 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^4+x^2+25 (2) x^4+4

(3) $x^4+3x^2y^2+4y^4$ (4) $x^4-6x^2y^2+y^4$

여러 가지 문자를 포함하는 다항식은 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하면 쉽게 인수분해되는 경우가 있다.

예제 04 다항식 $b^2-3b+ab-2a+2$를 인수분해하여라.

풀이 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$b^2-3b+ab-2a+2=(b-2)a+(b^2-3b+2)$

$=(b-2)a+(b-1)(b-2)$

$=(b-2)(a+b-1)$

답 $(b-2)(a+b-1)$

문제 5 다음 식을 인수분해하여라.

모든 문자의 차수가 같은 경우에는 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(1) $a^2+ab+a-b-2$ (2) $x^2+xy-2y^2+3y-1$

(3) $a^3-a^2b+ab^2+ac^2-b^3-bc^2$ (4) $x^2-2xy-3y^2+4x-4y+4$

5

목표| 주어진 다항식을 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a^2+ab+a-b-2=b(a-1)+a^2+a-2$

$=b(a-1)+(a-1)(a+2)$

$=\mathbf{(a-1)(a+b+2)}$

(2) $x^2+xy-2y^2+3y-1=x^2+xy-(2y^2-3y+1)$

$=x^2+xy-(2y-1)(y-1)$

$=\{x+(2y-1)\}\{x-(y-1)\}$

$=\mathbf{(x+2y-1)(x-y+1)}$

(3) $a^3-a^2b+ab^2+ac^2-b^3-bc^2$

$=c^2(a-b)+(a^3-a^2b+ab^2-b^3)$

$=c^2(a-b)+a^2(a-b)+b^2(a-b)$

$=\mathbf{(a-b)(a^2+b^2+c^2)}$

(4) $x^2-2xy-3y^2+4x-4y+4$

$=x^2+x(-2y+4)-(3y^2+4y-4)$

$=x^2+x(-2y+4)-(3y-2)(y+2)$

$=\{x-(3y-2)\}\{x+(y+2)\}$

$=\mathbf{(x-3y+2)(x+y+2)}$

지/도/자/료

두 개 이상의 문자를 포함하는 다항식을 인수분해할 때에는 다음과 같은 방법을 이용할 수 있도록 지도한다.

(i) 다항식이 이차식이면 이차식의 인수분해 공식을 이용하고, 사차식이면 인수분해 공식 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$를 활용할 수 있도록 식을 변형한다.

(ii) 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 본다. 이때 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 정리하는 것이 편리하다.

교과서 47 쪽

인수정리를 이용한 인수분해는 어떻게 하는가?

삼차 이상의 다항식의 인수분해는 인수정리를 이용한다.

인수정리를 이용하여 인수분해하는 방법을 알아보자.

다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이면 $x-\alpha$는 $P(x)$의 인수이므로

❶ $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$

와 같이 나타낼 수 있고, 몫 $Q(x)$는 조립제법을 이용하여 구할 수 있다.

예를 들어 다항식 $P(x)=x^3-3x^2+4x-2$는 최고차항의 계수가 1이므로

$$x^3-3x^2+4x-2=(x-a)(x^2+bx+c) \quad \cdots\cdots ①$$

와 같이 정수를 계수로 하는 두 다항식의 곱으로 인수분해된다고 하자.

①은 x에 대한 항등식이므로 양변의 상수항을 비교하면 $-2=-ac$, 즉 $ac=2$이다.

❷ 따라서 a는 두 정수를 곱하여 2가 되는 $1, -1, 2, -2$ 중의 하나이다.

이때 $P(1)=1^3-3\cdot1^2+4\cdot1-2=0$이므로 인수정리에 의하여 $x-1$은 $P(x)$의 인수이다.

따라서 조립제법을 이용하여 몫을 구하면 $P(x)$는 다음과 같이 인수분해됨을 알 수 있다.

$$P(x)=(x-1)(x^2-2x+2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

예제 05 다항식 x^3-3x-2를 인수분해하여라.

풀이 $P(x)=x^3-3x-2$로 놓으면

$$P(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)-2=0$$

이므로 인수정리에 의하여 $x+1$은 $P(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x)&=(x+1)(x^2-x-2) \\ &=(x+1)(x+1)(x-2) \\ &=(x+1)^2(x-2) \end{aligned}$$

답 $(x+1)^2(x-2)$

문제 6 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^3-4x^2+x+6 (2) $x^4-x^3+2x^2+x-3$

6

목표| 인수정리를 이용하여 주어진 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$으로 놓으면

$P(-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)^2-1+6=0$이므로 $P(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x)&=(x+1)(x^2-5x+6) \\ &=\mathbf{(x+1)(x-2)(x-3)} \end{aligned}$$

(2) $P(x)=x^4-x^3+2x^2+x-3$으로 놓으면

$P(1)=1^4-1^3+2\cdot1^2+1-3=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & -3 \\ & & 1 & 0 & 2 & 3 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 2 & 3 & \boxed{0} \\ & & -1 & 1 & -3 & \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x)&=(x-1)(x^3+2x+3) \\ &=\mathbf{(x-1)(x+1)(x^2-x+3)} \end{aligned}$$

본문 해설

❶ 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이면 인수정리에 의하여 일차식 $x-\alpha$는 $P(x)$의 인수이므로 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$와 같이 인수분해된다.
삼차 이상의 다항식은 인수정리를 이용하여 일차식인 인수를 찾고, 조립제법을 이용하여 몫을 구해 쉽게 인수분해할 수 있다.

❷ $P(x)=x^3-3x^2+4x-2$를 인수정리를 이용하여 인수분해할 때, $P(\alpha)=0$을 만족시키는 정수 α를 찾는 것이 중요하다. 이때 α의 값은 정수 범위에서의 2의 약수 중에서 찾으면 된다. 2의 약수는 자연수의 범위에서는 1, 2이지만 정수의 범위에서는 ±1, ±2이므로 α는 ±1, ±2 중 하나이다.

읽/기/자/료 아이젠슈타인의 판정법

독일의 수학자 아이젠슈타인(Eisenstein, F. G. M. ; 1823~1852)의 판정법은 어떤 다항식이 인수분해 가능한지 아닌지를 판정하는 방법 중 하나로 그 내용은 다음과 같다.

계수가 정수인 다항식

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

에 대하여

① a_n은 p의 배수가 아니다.

② a_{n-1}, a_{n-2}, $\cdots$, a_1, a_0은 모두 p의 배수이다.

③ a_0은 p^2의 배수가 아니다.

위의 세 가지 성질을 만족시키는 소수 p가 존재하면, 다항식 $P(x)$는 유리수 범위에서 더 이상 인수분해되지 않는다.

단, 고등학교 교육과정에서 배수는 양의 배수만으로 제한하여 생각하지만 이 판정법에서의 배수는 음의 배수도 포함한 것이다.

7

목표| 인수정리를 이용하여 미정계수를 구하고, 조립제법을 이용하여 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| 인수정리에 의하여 $P(2)=0$이므로
$P(2)=2^3-8\cdot2^2+2k+14=0$에서 $\quad k=\mathbf{5}$
$P(x)=x^3-8x^2+5x+14$를 조립제법을 이용하여 인수분해하면

2	1	-8	5	14
		2	-12	-14
	1	-6	-7	0

$P(x)=(x-2)(x^2-6x-7)$
$\quad=\mathbf{(x-2)(x+1)(x-7)}$

8

목표| 최고차항의 계수가 1이 아닌 삼차 이상의 다항식을 인수정리를 이용하여 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $P(x)=2x^3+3x^2+3x+1$로 놓고
$P(x)=(ax-b)(cx^2+dx+e)$ (a, b, c, d, e는 정수)의 꼴로 인수분해된다고 하면 $ac=2$, $be=-1$이다.
a는 1, -1, 2, -2 중의 하나, b는 1, -1 중의 하나이므로
$P\left(\frac{b}{a}\right)=0$에서 $\frac{b}{a}$의 값은 ±1, $\pm\frac{1}{2}$ 중의 하나이다.
$P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $x+\frac{1}{2}$은 $P(x)$의 인수이다.
따라서 조립제법을 이용하여 인수분해하면
$P(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+2)=\mathbf{(2x+1)(x^2+x+1)}$

(2) $P(x)=2x^4+5x^3-5x^2-5x+3$으로 놓고
$P(x)=(ax-b)(cx^3+dx^2+ex+f)$ (a, b, c, d, e, f는 정수)의 꼴로 인수분해된다고 하면
$ac=2$, $bf=-3$이다.
a는 1, -1, 2, -2 중의 하나, b는 1, -1, 3, -3 중의 하나이므로
$P\left(\frac{b}{a}\right)=0$에서 $\frac{b}{a}$의 값은 ±1, ±3, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$ 중의 하나이다.
$P(1)=0$, $P(-1)=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면
$P(x)=(x-1)(x+1)(2x^2+5x-3)$
$\quad=\mathbf{(x-1)(x+1)(2x-1)(x+3)}$

교과서 48 쪽

발전 **문제 7** 다항식 $P(x)=x^3-8x^2+kx+14$가 $x-2$로 나누어떨어질 때, 상수 k의 값을 구하고 $P(x)$를 인수분해하여라.

예제 06 다항식 $2x^3-3x^2+3x-1$을 인수분해하여라.

풀이 $P(x)=2x^3-3x^2+3x-1$로 놓고
$P(x)=(ax-b)(cx^2+dx+e)$ (a, b, c, d, e는 정수) …… ①
의 꼴로 인수분해된다고 하면 ①은 항등식이므로 $ac=2$, $be=1$이다.
a는 1, -1, 2, -2 중의 하나, b는 1, -1 중의 하나이므로
$P\left(\frac{b}{a}\right)=0$에서 $\frac{b}{a}$의 값은 1, -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ 중의 하나이다.
$x=\frac{1}{2}$을 대입하면 $\quad P\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\frac{1}{2}-1=0$
$x-\frac{1}{2}$은 $P(x)$의 인수이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$\frac{1}{2}$	2	-3	3	-1
		1	-1	1
	2	-2	2	0

$P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x+2)$
$\quad=\frac{1}{2}(2x-1)\cdot2(x^2-x+1)$
$\quad=(2x-1)(x^2-x+1)$

답 $(2x-1)(x^2-x+1)$

문제 8 다음 식을 인수분해하여라.
(1) $2x^3+3x^2+3x+1$ (2) $2x^4+5x^3-5x^2-5x+3$

단원 과제
앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.
인수분해를 이용하여 $\frac{998^3-1}{998\times999+1}$의 값을 구하여 보자.

단원 과제

목표| 인수분해 공식을 이용하여 복잡한 수에 대한 연산을 간편하게 할 수 있게 한다.

풀이|
$$\frac{998^3-1}{998\times999+1}=\frac{(998-1)(998^2+998+1)}{998(998+1)+1}$$
$$=\frac{(998-1)(998^2+998+1)}{998^2+998+1}$$
$$=\mathbf{997}$$

참고| 복잡한 수들끼리의 계산 중에는 인수분해 공식을 이용하면 간편하게 그 값을 구할 수 있는 경우가 있다. 예를 들면 $5\times15^2+15\times15^2+15\times15+5$, $\sqrt{11\times12\times13\times14}$ 등과 같은 경우이다.

교과서 49 쪽

중단원 기초

[해답 p.216]

수준별 학습

1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^3+4x^2+4x (2) $6x^4-15x^3-9x^2$

(3) x^3+x^2-x-1 (4) x^2y+xy^2+x+y

01 인수분해
공통인수가 있는 경우의 인수분해

2 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $8a^3+12a^2+6a+1$ (2) $x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$

(3) a^3+8 (4) $27x^3-8y^3$

01 인수분해
인수분해 공식

3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^4-13x^2+36

(2) $(x+y)^2-2(x+y)+1$

01 인수분해
복잡한 식의 인수분해

4 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^3+x^2-2 (2) x^3+2x^2-5x-6

(3) $x^4+x^3-3x^2-x+2$ (4) x^4-4x^2+x-2

01 인수분해
인수정리를 이용한 인수분해

5 부피가 $a^3+6a^2+11a+6$인 직육면체의 밑면의 넓이가 $(a+1)(a+2)$이다. 이 직육면체의 높이를 인수분해를 이용하여 구하여라.

01 인수분해
인수분해의 활용

중/단/원 기초

1

목표| 주어진 다항식을 공통인수로 묶은 후 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\boldsymbol{x(x+2)^2}$ (2) $\boldsymbol{3x^2(2x+1)(x-3)}$

(3) $\boldsymbol{(x+1)^2(x-1)}$ (4) $\boldsymbol{(x+y)(xy+1)}$

2

목표| 인수분해 공식을 이용하여 주어진 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\boldsymbol{(2a+1)^3}$ (2) $\boldsymbol{(x-3y)^3}$

(3) $\boldsymbol{(a+2)(a^2-2a+4)}$ (4) $\boldsymbol{(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)}$

3

목표| 공통부분을 한 문자로 치환하여 복잡한 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\boldsymbol{(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)}$

(2) $\boldsymbol{(x+y-1)^2}$

4

목표| 인수정리를 이용하여 주어진 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$x^3+x^2-2=\boldsymbol{(x-1)(x^2+2x+2)}$

(2)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & 2 & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

$x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x^2+4x+3)$

$=\boldsymbol{(x-2)(x+1)(x+3)}$

(3)

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ & & 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ & & 1 & 3 & 2 & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 & \end{array}$$

$x^4+x^3-3x^2-x+2$

$=(x-1)^2(x^2+3x+2)$

$=\boldsymbol{(x-1)^2(x+1)(x+2)}$

(4)

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & -4 & 1 & -2 \\ & & 2 & 4 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$x^4-4x^2+x-2=\boldsymbol{(x-2)(x^3+2x^2+1)}$

5

목표| 인수분해를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 다항식 $a^3+6a^2+11a+6$은 $(a+1)(a+2)$를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 6 & 11 & 6 \\ & & -1 & -5 & -6 \\ \hline -2 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ & & -2 & -6 & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

$a^3+6a^2+11a+6=(a+1)(a+2)(a+3)$

따라서 직육면체의 높이는 $\boldsymbol{a+3}$이다.

중/단/원 기본

1

목표| 공통부분을 한 문자로 치환하여 복잡한 다항식을 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\boldsymbol{(x-1)(x+2)(x-2)(x+3)}$

(2) $\boldsymbol{(x+1)(x-4)(x-1)(x-2)}$

(3) $\boldsymbol{(x+y)(x-y)(x^2-2y^2)}$

(4) $\boldsymbol{(x+1)(x-3)(x+2)(x-4)}$

2

목표| 주어진 다항식을 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2+2xy-3y^2+4y-1$

$=x^2+2yx-(3y^2-4y+1)$

$=x^2+2yx-(3y-1)(y-1)$

$=\boldsymbol{(x+3y-1)(x-y+1)}$

(2) $2x^2-y^2-xy-7x+y+6$

$=2x^2-(7+y)x-(y^2-y-6)$

$=2x^2-(7+y)x-(y+2)(y-3)$

$=\boldsymbol{(x-y-2)(2x+y-3)}$

교과서 50 쪽

중단원 기본

[해답 p.216]

수준별 학습

1 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$

(2) $(x^2-3x)^2-2x^2+6x-8$

(3) $x^4-3x^2y^2+2y^4$

(4) $(x^2-2x-5)(x^2-2x-6)-6$

01 인수분해
복잡한 식의 인수분해

2 다음 식을 인수분해하여라.

(1) $x^2+2xy-3y^2+4y-1$

(2) $2x^2-y^2-xy-7x+y+6$

01 인수분해
복잡한 식의 인수분해

3 다항식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$를 인수분해하여라.

01 인수분해
복잡한 식의 인수분해

4 다항식 x^3-x^2+x+a가 $x+1$로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값을 구하고 이 식을 인수분해하여라.

01 인수분해
인수정리를 이용한 인수분해

5 $a-b=102$일 때, $a^2+b^2-2ab-3a+3b+2$의 값을 구하여라.

01 인수분해

3

목표| 주어진 다항식을 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$=a^2b+abc+ca^2+ab^2+b^2c+abc+abc$

$\quad+bc^2+c^2a-abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=\boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a)}$

4

목표| 인수정리를 이용하여 미정계수를 구하고, 조립제법을 이용하여 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| $P(x)=x^3-x^2+x+a$로 놓으면

$P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$P(-1)=(-1)^3-(-1)^2+(-1)+a=0$

따라서 $a=3$이다.

조립제법을 이용하여 다항식 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	-1	1	3
		-1	2	-3
	1	-2	3	0

$P(x)=\boldsymbol{(x+1)(x^2-2x+3)}$

5

목표| 인수분해를 활용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2+b^2-2ab-3a+3b+2$

$=a^2-(2b+3)a+b^2+3b+2$

$=a^2-(2b+3)a+(b+1)(b+2)$

$=\{a-(b+1)\}\{a-(b+2)\}$

$=(a-b-1)(a-b-2)$

$=(102-1)(102-2)$ ← $a-b=102$

$=101\times100=\boldsymbol{10100}$

교과서 51 쪽

중단원 실력

[해답 p.216]

수준별 학습

1 다음 식을 인수분해하여라.

01 인수분해 복잡한 식의 인수분해

(1) $a^4+a^2b^2+b^4$

(2) x^4+3x^2+4

(3) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

2 다항식 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+k$가 x에 대한 이차식의 완전제곱꼴로 인수분해될 때, 상수 k의 값을 구하여라.

01 인수분해 복잡한 식의 인수분해

3 $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$을 이용하여 다음을 계산하여라.

01 인수분해

$$\frac{900\cdot 901+1}{931}$$

4 $a+b+c=0$일 때, $a^3+b^3+c^3-3abc$의 값을 구하여라.

01 인수분해

5 세 실수 a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, 다음 조건을 만족시키는 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.

01 인수분해 인수분해의 활용

$$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$$

중/단/원 실력

1

목표| 주어진 다항식을 A^2-B^2의 꼴로 변형하거나 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 정리하여 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a^4+a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$=\mathbf{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}$

(2) $x^4+3x^2+4=x^4+4x^2+4-x^2$

$=(x^2+2)^2-x^2$

$=\mathbf{(x^2+x+2)(x^2-x+2)}$

(3) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=ab(a-b)+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$

$=ab(a-b)+c^2(a-b)-c(a-b)(a+b)$

$=(a-b)(ab+c^2-ca-bc)$

$=(a-b)\{a(b-c)-c(b-c)\}$

$=\mathbf{(a-b)(b-c)(a-c)}$

2

목표| 공통부분이 생기도록 정리하여 인수분해 할 수 있게 한다.

풀이| $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)$

$=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)$

$x^2+8x=X$로 놓으면

$(X+7)(X+15)=X^2+22X+105$

$X^2+22X+105+k$가 완전제곱식이 되려면

$105+k=11^2=121$, $k=\mathbf{16}$

3

목표| 인수분해 공식을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{900\cdot 901+1}{931}$

$=\dfrac{30^2\cdot(30^2+1)+1}{30^2+30+1}=\dfrac{30^4+30^2+1}{30^2+30+1}$

$=\dfrac{(30^2+30+1)(30^2-30+1)}{30^2+30+1}=\mathbf{871}$

4

목표| 인수분해를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=\{(a+b)^3+c^3\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ca-bc+c^2-3ab)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a+b+c=0$이므로 $a^3+b^3+c^3-3abc=\mathbf{0}$

5

목표| 인수분해를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2$

$=-c^2(a+b)+a^3+b^3+a^2b+ab^2$

$=-c^2(a+b)+(a+b)(a^2-ab+b^2)+(a+b)ab$

$=(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$

$a+b=0$ 또는 $a^2+b^2=c^2$

a, b, c는 모두 양수이므로 $c^2=a^2+b^2$

따라서 **빗변의 길이가 c인 직각삼각형**이다.

교과서 52 쪽

수행 과제

소수의 판별

현대 사회는 정보화 사회에 접어들면서 암호 체계를 구축하는 데 많은 노력을 쏟고 있으며, 그 핵심에는 소수가 자리 잡고 있다. 수학자들도 오래전부터 이러한 소수에 많은 관심을 기울였다.

특히 소수를 만드는 공식이나 방법에 대한 연구가 오랫동안 진행되었지만 현재까지 아무도 성공하지 못하였다. 하지만 특정한 수가 소수인지 아닌지는 인수분해를 통해 어느 정도 판단할 수 있다.

예를 들어 1000001이 소인수분해가 되면 합성수이고, 소인수분해가 불가능하면 소수이다. 그런데 1000001은 다음과 같이 인수분해 공식을 이용하여 소인수분해할 수 있다.

$1000001=1000000+1=100^3+1^3$

$=(100+1)(100^2-100\cdot1+1^2)$ ← $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=101\cdot9901$

따라서 1000001은 소수가 아니다.

| 과 제 | 1 다음 수가 소수인지 아닌지 판별하고, 그 이유를 설명하여라.

(1) 27001 (2) 9991 (3) 1729

| 과 제 | 2 $100^2-98^2+96^2-94^2+\cdots+8^2-6^2+4^2-2^2$이 소수인지 아닌지 판별하고, 그 이유를 설명하여라.

교과서 53 쪽

대단원 학습 내용 정리

1 다항식의 연산

다항식의 덧셈과 뺄셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

(1) $A+B=B+A$ [교환법칙]

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ [결합법칙]

다항식의 곱셈

(1) 다항식의 곱셈에 대한 성질

세 다항식 A, B, C에 대하여

(i) $AB=BA$ [교환법칙]

(ii) $(AB)C=A(BC)$ [결합법칙]

(iii) $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$ [분배법칙]

(2) 곱셈 공식

(i) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(ii) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

다항식의 나눗셈

다항식 A를 다항식 B $(B\neq0)$로 나눌 때의 몫을 Q, 나머지를 R라고 하면

$A=BQ+R$ (단, (R의 차수)<(B의 차수))

2 나머지정리

항등식의 성질

(1) $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 $a=0$, $b=0$, $c=0$이다.

또 $a=0$, $b=0$, $c=0$이면 $ax^2+bx+c=0$은 x에 대한 항등식이다.

(2) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이면 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

또 $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이면 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$은 x에 대한 항등식이다.

나머지정리

(1) x에 대한 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눌 때의 나머지를 R라고 하면 $R=P(\alpha)$

(2) x에 대한 다항식 $P(x)$를 일차식 $ax-b$로 나눌 때의 나머지를 R라고 하면 $R=P\left(\frac{b}{a}\right)$

인수정리

x에 대한 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

또 $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$이다.

조립제법

각 항의 계수만을 이용하여 다항식을 일차식으로 나눈 몫과 나머지를 구하는 방법을 조립제법이라고 한다.

3 인수분해

인수분해 공식

(1) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

인수분해하는 방법

(1) 공통인수가 있으면 묶는다.

(2) 공식을 이용할 수 있으면 이용한다.

(3) 식을 변형하거나 공통부분을 한 문자로 바꾸어 공식을 이용할 수 있는지 조사한다.

(4) 여러 가지 문자를 포함하는 다항식은 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

(5) 삼차 이상의 다항식의 인수분해는 인수정리를 이용한다.

| 용어와 기호 | 미정계수법, 나머지정리, 인수정리, 조립제법

수행 과제

● 수행 과제 의도

소수와 합성수의 판별을 통하여 인수분해를 활용할 수 있도록 하기 위한 것이다.

과제 1 _풀이

(1) $27001=30^3+1=(30+1)(30^2-30\cdot1+1^2)$

$=31\cdot871$

따라서 27001은 소수가 아니다.

(2) $9991=100^2-3^2=(100+3)(100-3)$

$=103\cdot97$

따라서 9991은 소수가 아니다.

(3) $1729=12^3+1=(12+1)(12^2-12\cdot1+1^2)$

$=13\cdot133$

따라서 1729는 소수가 아니다.

과제 2 _풀이

$100^2-98^2+96^2-94^2+\cdots+8^2-6^2+4^2-2^2$

$=(100+98)(100-98)+(96+94)(96-94)$

$+\cdots+(8+6)(8-6)+(4+2)(4-2)$

$=(100+98)\cdot2+(96+94)\cdot2+\cdots$

$+(8+6)\cdot2+(4+2)\cdot2$

$=2(100+98+96+94+\cdots+8+6+4+2)$

이므로 주어진 식은 소수가 아니다.

교과서 54 쪽

대/단/원 평가 문제

I. 다항식

선택형

1 세 다항식 $A=x^2+2xy+y^2$, $B=x^2-2xy+y^2$, $C=3x^2-4y^2$에 대하여

$$X+2A=3(A+B)-C$$

를 만족시키는 다항식 X는?

① $x^2+4xy+8y^2$ ② $x^2-4xy+8y^2$
③ $x^2+6xy+8y^2$ ④ $x^2-8xy+8y^2$
⑤ x^2+8y^2

2 $(3x-2y)^3$을 전개하였을 때, xy^2의 계수는?

① -36 ② -18 ③ 0
④ 18 ⑤ 36

3 $(a-b-2c)^2$을 전개하면?

① $a^2+b^2+c^2-2ab+4bc-4a$
② $a^2+b^2+4c^2+2ab+4bc-4ca$
③ $a^2+b^2+4c^2-2ab+4bc-4ca$
④ $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc-4ca$
⑤ $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$

4 $x-y=3$, $x^3-y^3=72$일 때, xy의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

5 등식

$a(x-1)(x+1)-b(x-2)(x+3)=x^2-x+4$

가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

6 다항식 $P(x)=4x^3-3x-2$를 $x+1$과 $2x+1$로 나눈 나머지를 각각 a, b라고 할 때, ab의 값은?

① -9 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 9

7 다항식 $P(x)$를 $x+1$, $x-3$으로 나눈 나머지가 각각 3, -1일 때, 다항식 $P(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나눈 나머지는?

① $x-2$ ② $x-1$ ③ $x+2$
④ $-x+1$ ⑤ $-x+2$

8 다항식 x^3+kx^2+x-2가 $x-2$로 나누어떨어질 때, 상수 k의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 2 ⑤ 3

대/단/원 평가 문제

1

목표| 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

풀이| $X+2A=3(A+B)-C$에서

$X=A+3B-C$

$=x^2+2xy+y^2+3(x^2-2xy+y^2)-(3x^2-4y^2)$

$=x^2-4xy+8y^2$

답 ②

2

목표| 곱셈 공식을 이용하여 다항식을 전개할 수 있게 한다.

풀이| $(3x-2y)^3=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

따라서 xy^2의 계수는 36이다.

답 ⑤

3

목표| 곱셈 공식을 이용하여 다항식을 전개할 수 있게 한다.

풀이| $(a-b-2c)^2$

$=a^2+b^2+4c^2-2ab+4bc-4ca$

답 ③

4

목표| 곱셈 공식을 변형하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$이므로

$72=3^3+3xy\cdot3$, $xy=5$

답 ③

5

목표| 항등식의 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 양변에 $x=1$을 대입하면 $4b=4$

양변에 $x=2$를 대입하면 $3a=6$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로 $a+b=3$이다.

답 ③

6

목표| 나머지정리를 이용하여 나머지를 구할 수 있게 한다.

풀이| $a=P(-1)=4\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)-2=-3$

$b=P\left(-\frac{1}{2}\right)=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2=-1$

따라서 $ab=(-3)\cdot(-1)=3$이다.

답 ④

7

목표| 나머지정리를 이용하여 나머지를 구할 수 있게 한다.

풀이| $P(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라고 하면

$P(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$

$P(-1)=-a+b=3$ …… ①

$P(3)=3a+b=-1$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

따라서 구하는 나머지는 $-x+2$이다.

답 ⑤

교과서 55 쪽

[해답 p.217]

9 다항식 $5x^3+3x^2+1$을 $x+1$로 나눈 몫은?

① $5x^2-2x-2$　② $5x^2-2x+2$
③ $5x^2-5x+8$　④ $5x^2+5x+8$
⑤ $5x^2+8x+8$

10 다음 중에서 다항식 $x^2-2y^2-xy-4x-y+3$의 인수는?

① $x+y+1$　② $x-y+1$
③ $x-y+3$　④ $x+2y-3$
⑤ $x-2y-3$

11 인수분해 공식을 이용하여 $\dfrac{197^2-1}{199^2-1}\times\dfrac{199^3+1}{199^2-199+1}$을 계산하면?

① 194　② 196　③ 198
④ 200　⑤ 202

12 두 다항식 $P(x)=x^3+2x^2-x-2$와 $Q(x)=x^3-4x^2+x+6$의 공통인수는?

① $x-3$　② $x-1$　③ $x+1$
④ $x+2$　⑤ $x+3$

서답형

13 다항식 $P(x)=x^3+ax^2+bx+7$을 $(x+1)(x-2)$로 나눈 나머지가 $x+1$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 a, b의 값을 구하여라.
(2) 다항식 $P(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나눈 몫을 구하여라.

14 다항식 $P(x)=x^2+xy-2y^2-2x-y+1$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 다항식 $P(x)$를 x에 대하여 내림차순으로 정리하여라.
(2) (1)에서 정리한 식이 x에 대한 다항식이라고 할 때, 상수항을 인수분해하여라.
(3) 다항식 $P(x)$를 인수분해하여라.

서술형

15 등식 $x^2-4x+3=a(x+1)^2+b(x+1)+c$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

서술형

16 다항식 $P(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지가 각각 2, 3이고, 각 항의 계수가 모두 정수일 때, 차수가 가장 낮은 다항식 $P(x)$를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

8

목표| 인수정리를 이용하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $P(x)=x^3+kx^2+x-2$라고 하면
$x-2$로 나누어떨어지므로 $P(2)=0$
$P(2)=2^3+k\cdot2^2+2-2=0$, $k=-2$

답 ②

9

목표| 조립제법을 이용하여 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 몫을 구할 수 있게 한다.

풀이| 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 5 & 3 & 0 & 1 \\ & & -5 & 2 & -2 \\ \hline & 5 & -2 & 2 & -1 \end{array}$$

$5x^3+3x^2+1=(x+1)(5x^2-2x+2)-1$
따라서 몫은 $5x^2-2x+2$이다.

답 ②

10

목표| 주어진 다항식을 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| $x^2-2y^2-xy-4x-y+3$
$=x^2-x(y+4)-(2y^2+y-3)$
$=x^2-x(y+4)-(2y+3)(y-1)$
$=(x-2y-3)(x+y-1)$
따라서 인수는 $x-2y-3$, $x+y-1$이다.

답 ⑤

11

목표| 인수분해 공식을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$,
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
이므로

$$\frac{197^2-1}{199^2-1}\times\frac{199^3+1}{199^2-199+1}$$
$$=\frac{(197+1)(197-1)}{(199+1)(199-1)}\times\frac{(199+1)(199^2-199+1)}{199^2-199+1}$$
$$=197-1=196$$

답 ②

12

목표| 인수정리를 이용하여 인수분해하고, 공통인수를 찾을 수 있게 한다.

풀이| $P(1)=1^3+2\cdot1-1-2=0$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+3x+2)=(x-1)(x+1)(x+2)$
$Q(-1)=(-1)^3-4\cdot(-1)^2+(-1)+6=0$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$Q(x)=(x+1)(x^2-5x+6)=(x+1)(x-2)(x-3)$
따라서 두 다항식 $P(x)$와 $Q(x)$의 공통인수는 $x+1$이다.

답 ③

13

목표| 나머지정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $P(x)=x^3+ax^2+bx+7$을 $(x+1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면 나머지가 $x+1$이므로

$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+x+1$

(1) $P(-1)=(-1)^3+a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+7=0$에서

$a-b=-6$ …… ①

$P(2)=2^3+a\cdot 2^2+b\cdot 2+7=3$에서

$4a+2b=-12,\ 2a+b=-6$ …… ②

①, ②을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=2$

(2) $P(x)=x^3-4x^2+2x+7$이므로

$x^3-4x^2+2x+7=(x+1)(x-2)Q(x)+x+1$

$(x+1)(x-2)Q(x)=x^3-4x^2+x+6$

-1	1	-4	1	6
		-1	5	-6
2	1	-5	6	0
		2	-6	
	1	-3	0	

$x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x-2)(x-3)$

따라서 구하는 몫은 $Q(x)=x-3$이다.

답 (1) $a=-4,\ b=2$
(2) $x-3$

14

목표| 주어진 다항식을 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2+(y-2)x-2y^2-y+1$

(2) (1)의 식이 x에 대한 다항식이라고 할 때, 상수항은 $-2y^2-y+1$이므로 인수분해하면

$-(2y^2+y-1)=-(2y-1)(y+1)$

(3) (1), (2)에서

$P(x)=x^2+(y-2)x-(2y-1)(y+1)$

$=(x+2y-1)(x-y-1)$

답 (1) $x^2+(y-2)x-2y^2-y+1$
(2) $-(2y-1)(y+1)$
(3) $(x+2y-1)(x-y-1)$

15

목표| 항등식의 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^2-4\cdot(-1)+3=c$에서 $c=8$

양변에 $x=0$을 대입하면 $3=a+b+8$에서

$a+b=-5$ …… ①

양변에 $x=-2$를 대입하면

$(-2)^2-4\cdot(-2)+3=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+8$에서

$a-b=7$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-6$

답 $a=1,\ b=-6,\ c=8$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	x에 적당한 수를 대입하여 c의 값 구하기	20%
	x에 적당한 수를 대입하여 a, b에 대한 방정식 만들기	40%
	a, b에 대한 연립방정식 풀기	30%
답 구하기	상수 a, b, c의 값 구하기	10%

16

목표| 나눗셈의 원리와 나머지정리를 이용하여 조건을 만족시키는 다항식를 구할 수 있게 한다.

풀이| $P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라고 하면

$P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$P(1)=a+b=2$ …… ①

$P(2)=2a+b=3$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1$

$P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+x+1$

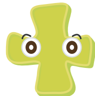
$Q(x)=0$일 때 $P(x)$의 차수가 가장 낮으므로 구하는 $P(x)$는 $P(x)=x+1$

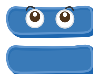
답 $x+1$

채점 기준

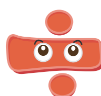
영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	나눗셈의 원리를 이용하여 등식 세우기	20%
	$x=1$, $x=2$를 대입하여 a, b에 대한 방정식 만들기	20%
	상수 a, b의 값을 구하여 $P(x)$에 대한 등식 완성하기	40%
답 구하기	$Q(x)=0$를 대입하여 가장 낮은 차수의 $P(x)$ 구하기	20%

History



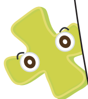


수 학 역 사



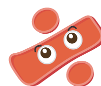
수학 기호는 누가 언제부터 사용했을까?

수학은 기호의 학문이라고 한다. 고대 그리스에서 수학 기호를 사용한 흔적들이 있지만 본격적으로 사용한 것은 16세기 초 유럽에서 대수학이 발달하면서부터이다. 수학자들은 누구보다도 기호의 편리성을 절감하고 있었기에 수학이 발달할수록 새로운 수학 기호가 많이 만들어졌다. 그렇다면 가장 많이 사용하는 =, +, −, ×, ÷는 각각 누가 만들었을까?



등호 =는 1557년 영국의 수학자 레코드(Recorde, R. ; 1510~1558)의 “지혜의 숫돌”이라는 책에서 처음 사용되었다. 평행한 두 선을 길게 그어 양쪽이 서로 같다는 뜻을 나타내었는데 당시에는 등호가 지금보다 훨씬 길었다고 한다.

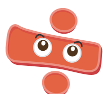
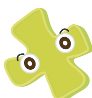
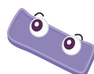
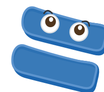
덧셈 기호 +는 13세기경 이탈리아의 수학자 피보나치(Fibonacci ; 1170~1250)가 처음 사용하였다고 알려졌으며, 덧셈을 뜻하는 라틴어 ‘et’가 줄어서 +가 되었다고 한다.



뺄셈 기호 −는 ‘모자라다’는 뜻의 라틴어 ‘minus’를 간단히 $\overline{m}$으로 사용하던 것을 독일의 수학자 비트만(Widmann, J. ; 1462~1498)이 위의 −만 따서 사용했다고 한다.

곱셈 기호 ×는 1631년 영국의 수학자 오트레드(Oughtred, W. ; 1574~1660)가 “수학의 열쇠”라는 책에서 처음 사용하였다. 이후 다항식에서는 × 대신에 ·을 사용하기도 했다.

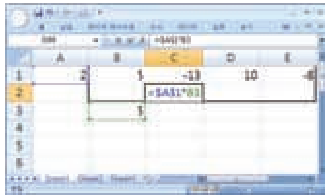
나눗셈 기호 ÷는 분수를 나타내던 모양으로 10세기경부터 사용되었는데, 원래 비를 나타내는 기호 :에서 유래되었다.

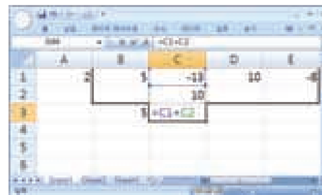





컴퓨터를 이용하여 몫과 나머지 구하기

삼차식 ax^3+bx^2+cx+d를 $x-k$로 나눌 때의 몫과 나머지를 컴퓨터 프로그램을 활용하여 구할 수 있다. 다음은 스프레드시트에서 조립제법을 이용하여 나눗셈 $(5x^3-13x^2+10x-8)\div(x-2)$의 몫과 나머지를 구하는 방법이다.

❶ 셀 A1에 2를 입력한다.
❷ 셀 B1, C1, D1, E1에 삼차식의 각 항의 계수인 5, -13, 10, -8을 차례로 입력한다.
❸ 셀 B3에 '=B1' 을 입력한다.
❹ 셀 C2에 '=A1*B3' 을 입력하고 셀 E2까지 드래그한다.
❺ 셀 C3에 '=C1+C2' 를 입력하고 셀 E3까지 드래그한다.



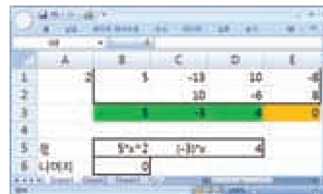


이때 셀 B3, C3, D3의 값 5, -3, 4가 몫의 계수이고, 셀 E3의 값 0이 나머지이다. 즉,

몫: $5x^2-3x+4$

나머지: 0

이다.



나누는 식 $x-k$에서 k의 값과 삼차식 ax^3+bx^2+cx+d에서 계수 a, b, c, d의 값이 달라질 때마다 셀 A1과 셀 B1, C1, D1, E1의 값을 각각 바꾸어 입력하면 바뀌어진 몫과 나머지를 구할 수 있다.

수 학 ➕ 공 학

경유를 얻을 수 있는 원유의 끓는 온도, 우체국의 소포 요금 기준 등은

부등식으로 표현할 수 있다.

방정식과 부등식

Ⅱ

|준|비|학|습|

중③ 이차방정식

1 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+2x-15=0$ $x=-5$ 또는 $x=3$ (2) $2x^2+x-8=0$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{65}}{4}$

중② 연립일차방정식, 연립일차부등식

2 다음 연립일차방정식과 연립일차부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x+3y=-8 \\ x-2y=3 \end{cases}$ $x=-1,\ y=-2$ (2) $\begin{cases} 8x-5\le 10x+1 \\ 2+6x<3x+8 \end{cases}$ $-3\le x<2$

수학 Ⅰ 인수분해

3 다음 식을 인수분해하여라.

(1) x^3+3x^2+x-5 $(x-1)(x^2+4x+5)$ (2) x^3-4x^2+x+6 $(x+1)(x-2)(x-3)$

단원의 지도 목표

1. 복소수와 이차방정식

① 복소수의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 사칙계산을 할 수 있게 한다.
② 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 알게 한다.
③ 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있게 한다.
④ 이차방정식에서 근과 계수의 관계를 이해하게 한다.

2. 이차방정식과 이차함수

① 이차함수와 이차방정식의 관계를 이해하게 한다.
② 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하게 한다.
③ 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

3. 여러 가지 방정식

① 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있게 한다.
② 미지수가 3개인 연립일차방정식과 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있게 한다.

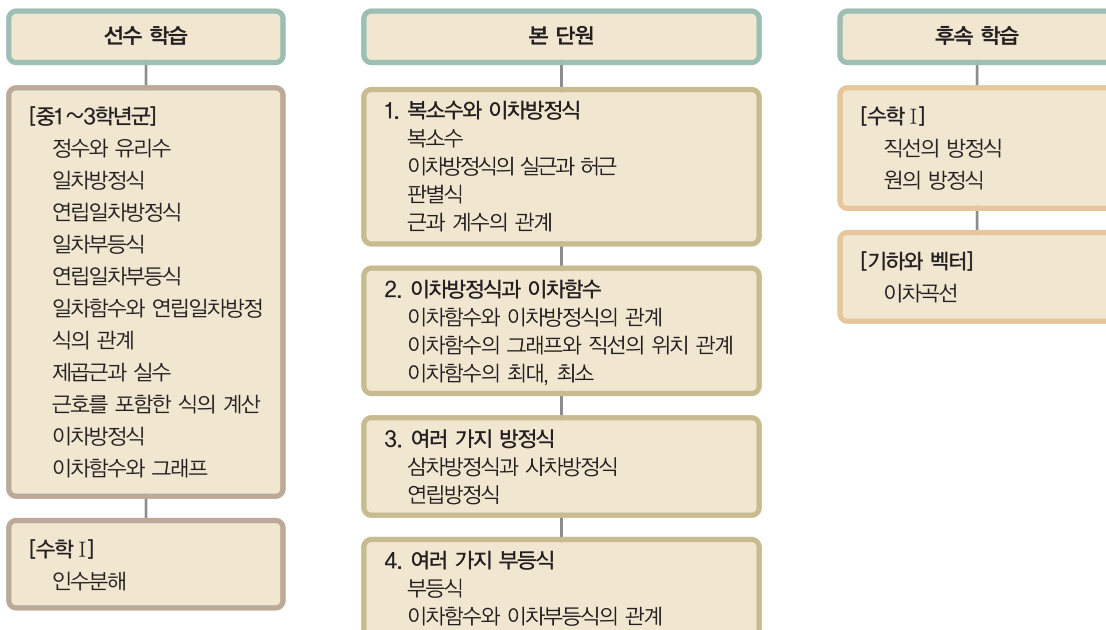
4. 여러 가지 부등식

① 부등식의 성질을 이해하고, 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.
② 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 방정식은 계수가 실수인 경우만 다룬다.
② 방정식과 부등식의 풀이에서 지나치게 복잡한 계산 문제는 다루지 않는다.
③ 삼차방정식, 사차방정식, 연립이차방정식, 이차부등식, 연립이차부등식 용어는 교수 · 학습 상황에서 다루어질 수 있다.

교수 · 학습의 계열



단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~5	58~59	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 복소수와 이차방정식	중단원 도입		60	• 수의 범위가 넓어지다.	
	01 복소수		61~69	• 복소수의 뜻 • 복소수가 서로 같을 조건 • 켤레복소수 • 복소수의 사칙계산 • 음수의 제곱근	허수단위 복소수 실수부분 허수부분 허수 켤레복소수 i, $a+bi$, $\overline{a+bi}$
	02 이차방정식의 실근과 허근	6	70~71	• 실근과 허근	실근 허근
	03 판별식	7	72~74	• 이차방정식의 판별식	판별식
	04 근과 계수의 관계	8~9	75~78	• 근과 계수의 관계 • 두 수를 근으로 하는 이차방정식	
	수준별 학습	10	79~81	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 이차방정식과 이차함수	중단원 도입	11~12	82	• 한계를 뛰어넘다.	
	01 이차함수와 이차방정식의 관계		83~85	• 이차함수와 이차방정식의 관계	
	02 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계	13	86~88	• 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계	
	03 이차함수의 최대, 최소	14~15	89~92	• 이차함수의 최대, 최소	
	수준별 학습	16	93~95	• 중단원 확인 학습 문제	
3. 여러 가지 방정식	중단원 도입	17~18	96	• 균형 잡힌 식단 계획하기	
	01 삼차방정식과 사차방정식		97~100	• 삼차방정식과 사차방정식	
	02 연립방정식	19~21	101~106	• 미지수가 3개인 연립일차방정식 • 미지수가 2개인 연립이차방정식	
	수준별 학습	22	107~109	• 중단원 확인 학습 문제	
4. 여러 가지 부등식	중단원 도입	23~24	110	• 불꽃놀이의 색으로 원료의 성분을 알 수 있다.	
	01 부등식		111~114	• 부등식의 성질 • 절댓값을 포함한 일차부등식	
	02 이차함수와 이차부등식의 관계	25~27	115~120	• 이차함수의 그래프와 이차부등식의 해 • 연립이차부등식	
	수준별 학습	28	121~123	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		29~30	124~129	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 방정식의 역사

고대의 여러 문명의 기록을 살펴보면 방정식과 관련된 문제와 해법이 많이 나와 있다. 가장 오래된 수학서인 아메스(Ahmes ; ?B.C. 1680～?B.C. 1620)의 "파피루스"(B.C. 1650년경)에 처음으로 일차방정식의 해법이 등장한다. 또 탈레스(Thales ; ?B.C. 624～?B.C. 546)는 피라미드의 그림자를 이용하여 그 높이를 측정하였는데, 이때 비례식을 이용하여 일차방정식을 풀었다.

방정식을 본격적으로 연구한 수학자는 디오판토스(Diophantos ; ?200～?284)이고, 일반적인 이차방정식을 취급한 사람은 인도의 아리아바타(Aryabhata ; 476～550)이다.

이항을 이용하여 방정식을 푸는 방법이 정착된 것은 알콰리즈미(Al-Khwarizmi ; ?780～?850) 시대부터라고 생각되고 있다. 그는 이항을 al－gebr라고 불렀는데, 이것이 오늘날의 대수 algebra의 어원이 되었다.

방정식의 해법은 인도의 수학에서도 많이 발견되었는데, 브라마굽타(Brahmagupta ; 598～?665)는 일차부정방정식의 일반적인 해법을 최초로 소개하였으나 음수의 해까지 확장하지는 못하였다. 음수의 해까지도 확실히 생각한 것은 바스카라(Bhaskara, A. ; 1114～1185(1193?))였다.

이차방정식의 근의 공식에 의한 풀이는 기원전 2000년에 바빌로니아 인들의 기록에 나타나며, 중국에서 기원전 150년경에 저술된 "구장산술"에도 나타나 있다.

방정식의 풀이 방법에 대한 연구는 르네상스 시대에 이르러 아라비아 수학 책이 라틴어로 번역되어 유럽에 소개되면서 큰 발전을 이룩하게 되었다. 이차방정식의 일반적인 풀이는 이미 알려져 있었기 때문에 삼차방정식의 일반적인 풀이가 문제가 되었다.

삼차방정식의 근의 공식은 타르탈리아(Tartaglia, N. F. ; 1499～1557)에 의하여 발견되었다. 당시 수학 교수였던 카르다노(Cardano. G. ; 1501～1576)는 삼차방정식의 근의 공식이 자신의 결과인 듯 발표하였고, 타르탈리아와의 논쟁에서 자신의 지위를 이용하여 타르탈리아를 곤경으로 몰아넣었다.

사차방정식의 근의 공식은 카르다노의 제자였던 페라리(Ferrari, L. ; 1522～1565)가 발견하였다. 이후 오차 이상의 방정식의 일반적인 해법을 찾는 것이 수학계의 관심사였지만 오차 이상의 방정식을 푸는 일반적인 방법은 존재하지 않는다는 것을 아벨(Abel, N. H. ; 1802～1829)이 증명하였다. 그는 이것의 증명 과정에서 '군'의 개념을 생각해 내었고 이 군 이론은 20세기 수학의 특징인 추상주의의 계기가 되어 수학 전반에 큰 영향을 주었다.

갈루아(Galois, É. ; 1811～1832)는 방정식이 오차 이상인 경우에는 근의 공식이 존재하지 않음을 보였고, '갈루아 이론'이라고 불리는 방법을 제시하였다. 이는 현대수학에서 방정식을 풀 때 가장 중요한 계산 방법으로 이용되고 있다. 그 후 가우스(Gauss, K. F. ; 1777～1855)는 n차방정식은 복소수의 범위에서 n개의 근을 가진다는 것을 증명하였다.

2. 부등식의 역사

부등식에 대한 연구는 16세기경 영국의 오트레드(Oughtred, W. ; 1574～1660)에 의해서 시작하였으며, 오트레드는 부등식의 기호로 ⊏, ⊐를 사용하였다. 부등호 외에도 수학 기호 ～, 곱셈 ×을 저서 "수학의 열쇠"(1631)에서 처음 사용하였다. 현재 우리가 사용하고 있는 부등호 <, >는 영국의 수학자이자 천문학자인 헤리엇(Harriot, T. ; 1560～1621)이 그

의 저서 “Art Analytic Praxis”에서 최초로 사용하였다. 이 책은 사후 10년이 되는 해인 1631년에 발행되었다. 그는 인수분해를 이용한 최초의 인물이기도 하며, 또 근과 계수의 관계를 정식화(定式化)하는 등 방정식의 해법을 포함하는 대수학의 근대적 정식화에 공헌하였다.

등호와 부등호를 함께 쓰는 기호 ≤, ≥는 18세기 프랑스의 물리학자인 부게르(Bouguer, P. ; 1698~1758)에 의해서 사용되었다.

3. 방정식의 근

(1) 삼차방정식의 근(Cardano의 해법)

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0\,(a\neq 0)$에

$x=y-\dfrac{b}{3a}$를 대입하여 정리하면

$$ay^3+\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)y+d-\frac{bc}{3a}+\frac{4b^3}{27a^2}=0$$

이 된다. 이 등식의 양변을 a로 나누고

$$3p=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2},\ -2q=\frac{d}{a}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{4b^3}{27a^3}$$

으로 놓으면

$$y^3+3py-2q=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

인 삼차방정식이 된다. 이것을 풀기 위해 $y=A+B$로 놓으면

$$y^3=A^3+B^3+3AB(A+B)=A^3+B^3+3ABy$$

$$y^3-3ABy-(A^3+B^3)=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이 식을 ㉠과 비교하면

$$\begin{cases} A^3+B^3=2q \\ AB=-p \end{cases}$$

가 된다. 이 식에서 A^3과 B^3을 구하기 위하여 이 두 값을 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$t^2-2qt-p^3=0$이고, $t=q\pm\sqrt{p^3+q^2}$이므로

$$A=\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}},\ B=\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}}$$

으로 놓으면

$$y=A+B=\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}}$$

은 방정식 ㉠의 한 근이 된다.

한편 ㉡에서

$$y^3+(-A)^3+(-B)^3-3y(-A)(-B)=0$$

이 식을 복소수의 범위에서 인수분해하면

$$(y-A-B)(y-\omega A-\omega^2B)(y-\omega^2A-\omega B)=0$$

이므로

$$\omega A+\omega^2B,\ \omega^2A+\omega B$$

도 ㉠의 근이 된다. 여기서 ω는 $\omega^2+\omega+1=0$을 만족시키는 값이다.

따라서 방정식 ㉠의 근은

$$y=\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}}$$

$$y=\omega\cdot\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}+\omega^2\cdot\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}}$$

$$y=\omega^2\cdot\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}+\omega\cdot\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}}$$

이다.

(2) 사차방정식의 해법(Ferrari의 해법)

사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$에 $x=y-\dfrac{a}{4}$를 대입하여 정리하면

$$y^4+py^2+qy+r=0$$

의 형태가 된다. 이때 $y^4=-py^2-qy-r$의 양변에 $2y^2t+t^2$을 더하여 정리하면

$$(y^2+t)^2=(2t-p)y^2-qy+t^2-r \qquad \cdots\cdots ㉢$$

가 된다. 이제 우변의 식이 완전제곱식이 되도록 하려면

$$D=q^2-4(2t-p)(t^2-r)=0 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

이 되어야 한다. 즉, t에 대한 삼차방정식 ㉣의 근을 택하여 ㉢에 대입하면 된다.

따라서 ㉣을 만족시키는 t에 대하여 ㉢의 식은

$$(y^2+t)^2=(my+n)^2$$

의 형태가 되고, 따라서

$$y^2-my-n+t=0,\ y^2+my+n+t=0$$

의 두 이차방정식으로 변환된다. 따라서 y의 값은 이 두 이차방정식의 해 4개가 되며, 이 값을 $x=y-\dfrac{a}{4}$에 대입하면 주어진 사차방정식의 해 4개를 얻을 수 있다.

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원	Ⅱ. 방정식과 부등식	쪽수	교과서 58~62쪽
소단원	1. 복소수와 이차방정식　01 복소수	차시	1/30
학습 목표	복소수의 뜻을 안다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◐ 중학교에서 다루었던 실수의 분류에 대하여 간단히 확인, 점검한다. ◐ 중단원 도입 글을 읽고 단원 과제를 발문하여 이번 중단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 것임을 암시한다. ◐ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 복소수의 뜻을 안다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◐ 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. ◐ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◐ 학습 내용 설명 **복소수** (1) 허수단위: 제곱하여 -1이 되는 수, $i=\sqrt{-1}$ (2) 복소수: $a+bi$ (a, b는 실수)의 꼴로 나타나는 수 (3) 허수: 실수가 아닌 복소수 (4) 복소수의 분류 a, b가 실수일 때 $(i=\sqrt{-1})$ 복소수$(a+bi)$ $\begin{cases} 실수(b=0) \\ 허수(b\neq 0) \end{cases}$ $\underset{\text{실수부분}}{a}+\overset{\text{허수부분}}{b}i$ ◐ 문제 1번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	복소수는 허수뿐만 아니라 실수도 포함하는 개념임을 이해하게 한다.
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 복소수의 성질을 이해한다.	

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원		Ⅱ. 방정식과 부등식	쪽수	교과서 62~63쪽
소단원		1. 복소수와 이차방정식　01 복소수	차시	2/30
학습 목표		복소수의 성질을 이해한다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◆ 이전 차시에서 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◆ 중학교에서 다루었던 무리수가 같을 조건을 복습하면서 복소수가 같을 조건은 무엇일지 발문한다. ◆ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 복소수의 성질을 이해한다.		
전개	개념 학습 문제 해결	◆ 학습 내용 설명 **복소수가 서로 같을 조건** a, b, c, d가 실수일 때 (1) $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$이다. 또 $a=c$, $b=d$이면 $a+bi=c+di$이다. (2) $a+bi=0$이면 $a=0$, $b=0$이다. 또 $a=0$, $b=0$이면 $a+bi=0$이다. **켤레복소수** 복소수 $a+bi$의 켤레복소수는 $\overline{a+bi}=a-bi$이다. ◆ 예제 01을 설명한다. ◆ 문제 2, 3번과 사고력 기르기를 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◆ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◆ 다음 차시를 예고한다. • 복소수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.		

1 복소수와 이차방정식

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 복소수의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 사칙계산을 할 수 있게 한다.

② 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 알게 한다.

③ 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있게 한다.

④ 이차방정식에서 근과 계수의 관계를 이해하게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 복소수	복소수의 뜻
	복소수가 서로 같을 조건
	켤레복소수
02 이차방정식의 실근과 허근	실근과 허근
03 판별식	이차방정식의 판별식
04 근과 계수의 관계	근과 계수의 관계
	두 수를 근으로 하는 이차방정식
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 60 쪽

1 복소수와 이차방정식

수의 범위가 넓어지다.

인류는 수를 표현할 때 상형 문자나 쐐기 문자, 갑골 문자를 사용하여 나타내다가 점차 추상적인 기호를 사용하기 시작하였다. 그에 따라 수학이 발전하게 되었고, 결과적으로 수의 확장이 자연스럽게 이루어졌다. 그 과정에서 피타고라스학파는 모든 수는 정수와 유리수로 이루어져 있다고 믿었으며 중세의 뛰어난 수학자 파스칼(Pascal, B. ; 1623~1662)조차도 "0에서 4를 빼면 0이 된다는 것을 모르는 사람이 있다."라는 말을 할 정도로 음수를 인정하지 않았다. 그러나 19세기부터 수의 범위는 실수를 넘어 복소수까지 확장되어 수학 발전의 밑거름이 되었다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 69쪽

수학의 역사에서 수는 어떻게 확장되어 왔을까?

들어가면서 이 단원에서는 수의 범위를 실수에서 복소수로 확장하여 중학교에서 실수 범위에서만 다루었던 이차방정식의 근을 허수 범위까지 다룬다. 또한 이차방정식의 다양한 성질을 다루어 이차방정식에 대한 이해를 보다 높인다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 복소수의 뜻과 성질을 이해하고, 사칙계산을 할 수 있다.	상	복소수의 뜻과 필요성을 설명하고, 복소수의 성질을 이용하여 사칙계산을 할 수 있다.
	중	두 복소수의 사칙계산을 할 수 있다.
	하	주어진 수에서 복소수, 실수, 허수를 찾을 수 있다.
2. 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 알고, 판별식의 의미를 설명할 수 있다.	상	이차방정식의 근을 판별하고, 판별식의 의미를 설명할 수 있다.
	중	판별식을 이용하여 이차방정식의 근을 판별할 수 있다.
	하	판별식을 이용하여 계수가 한 자리 정수인 이차방정식의 근을 판별할 수 있다.
3. 이차방정식에서 근과 계수의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.	상	이차방정식의 근의 공식으로부터 근과 계수의 관계를 이끌어내고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 포함한 식의 값을 구할 수 있다.
	하	근과 계수의 관계를 이용하여 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구할 수 있다.

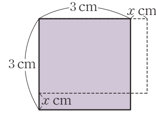
교과서 61 쪽

01 복소수

● 복소수의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 사칙계산을 할 수 있다.

복소수란 무엇인가?

탐구 활동 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 3 cm인 정사각형에서 가로의 길이를 x cm만큼 늘리고 세로의 길이를 x cm만큼 줄여서 직사각형을 만들려고 한다. 물음에 답하여 보자.



1. 넓이가 5 cm^2인 직사각형이 되도록 하는 실수 x의 값을 구하여 보자.
2. 넓이가 6 cm^2인 직사각형이 되도록 하는 실수 x의 값을 구하여 보자.
3. 넓이가 10 cm^2인 직사각형이 되도록 하는 실수 x의 값이 존재하는지 생각하여 보자.

제곱하여 -1이 되는 실수는 존재하지 않으므로 방정식 $x^2=-1$은 실수의 범위에서는 해를 가지지 않는다. 따라서 이와 같은 방정식이 해를 가지도록 하기 위해서는 수의 범위를 확장하여야 한다.

이제 제곱하여 -1이 되는 새로운 수 하나를 생각하여 그것을 i로 나타내기로 하자. 즉,

$$i^2=-1 \ (i=\sqrt{-1})$$

이다. 이때 i를 **허수단위**라고 한다.

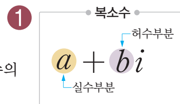
● 허수단위 i는 허수를 뜻하는 영어 imaginary number의 첫 글자를 따온 것으로 오일러(Euler, L. ; 1707~1783)가 처음 사용하였다.

오일러

또 임의의 두 실수 a, b에 대하여

$$a+bi$$

의 꼴로 나타내는 수를 **복소수**라 하고, a를 이 복소수의 **실수부분**, b를 **허수부분**이라고 한다.

❶ 

임의의 실수 a는 $a+0i$의 꼴로 나타낼 수 있으므로 실수도 복소수이다.

한편 실수가 아닌 복소수 $a+bi$ $(b\neq0)$를 **허수**라고 한다.

새로 나온 용어와 기호

- 허수단위(虛數單位, imaginary unit)
- 복소수(複素數, complex number)
- 실수부분(實數部分, real part)
- 허수부분(虛數部分, imaginary part)
- 허수(虛數, imaginary number)
- 켤레복소수(complex conjugates)
- i, $a+bi$, $\overline{a+bi}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 주어진 정사각형의 가로, 세로의 길이를 변형하여 만든 직사각형의 넓이를 식으로 나타낸 방정식을 푸는 과정에서, 제곱하여 음수가 되는 실수는 존재하지 않음을 생각해 봄으로써 허수의 필요성을 느끼게 하기 위한 것이다.

한 변의 길이가 3 cm인 정사각형에서 가로의 길이를 x cm만큼 늘리고 세로의 길이를 x cm만큼 줄여서 만든 직사각형의 넓이는 $(3+x)(3-x)=9-x^2$이므로

01 복소수

소단원 지도 목표

① 복소수의 뜻을 알고, 주어진 수에서 복소수, 실수, 허수를 찾을 수 있게 한다.
② 복소수가 서로 같을 조건을 알게 한다.
③ 켤레복소수의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있게 한다.
④ 복소수의 사칙계산을 할 수 있게 한다.
⑤ 음수의 제곱근을 이해하고, 이를 계산할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 복소수는 허수뿐만 아니라 실수도 포함하는 개념임을 이해하게 한다.

2. 복소수를 이차방정식의 해의 존재성과 연계하여 지도하고, 복소수의 불필요한 계산에 집중하지 않도록 유의한다.

1. $9-x^2=5$에서 $x^2=4$이므로
$x=2$ 또는 $x=-2$
$x>0$이므로 구하는 실수 x의 값은 $\boldsymbol{x=2}$이다.

2. $9-x^2=6$에서 $x^2=3$이므로
$x=\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$
$x>0$이므로 구하는 실수 x의 값은 $\boldsymbol{x=\sqrt{3}}$이다.

3. $9-x^2=10$에서 $x^2=-1$
모든 실수에 대하여 $(\text{실수})^2\geq0$이므로 $x^2=-1$을 만족시키는 실수 x의 값은 **존재하지 않는다.**

본문 해설

❶ 복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)의 허수부분은 bi가 아니라 b이다.

본문 해설

❶ 복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에서 실수부분과 허수부분의 값에 따라 복소수를 실수와 허수로 분류할 수 있다.
한편 $b=0$일 때, $a+bi$는 실수이므로 실수는 복소수에 포함되는 개념이다.

교과서 62 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **복소수의 분류**

a, b가 실수일 때 ($i=\sqrt{-1}$)

$$\text{복소수}(a+bi)\begin{cases}\text{실수}(b=0)\\\text{허수}(b\neq0)\end{cases}$$

보기 -2, $1+\sqrt{3}$, $2-i$, $5i$는 모두 복소수이다. 여기서 -2, $1+\sqrt{3}$은 실수이고 $2-i$, $5i$는 허수이다.

문제 1 다음 복소수 중에서 실수, 허수를 각각 찾아라.

$$2+3i,\quad \sqrt{5}-2i,\quad \frac{1}{2}i,\quad 4$$

복소수가 서로 같을 조건은 무엇인가?

두 복소수의 실수부분과 허수부분이 각각 같을 때, 두 복소수는 서로 같다고 한다.
즉, 두 복소수 $a+bi$와 $c+di$ (a, b, c, d는 실수)에 대하여

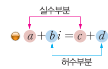
$$a=c,\ b=d$$

일 때, 두 복소수는 서로 같다고 한다.
특히 $a+bi=0$이면

$$a=0,\ b=0$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.



❷ **복소수가 서로 같을 조건**

a, b, c, d가 실수일 때

(1) $a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$이다.
또 $a=c$, $b=d$이면 $a+bi=c+di$이다.

(2) $a+bi=0$이면 $a=0$, $b=0$이다.
또 $a=0$, $b=0$이면 $a+bi=0$이다.

1

목표| 복소수, 실수, 허수의 뜻을 알고, 이를 구분할 수 있게 한다.

풀이| 실수 : **4**
허수 : $\mathbf{2+3i}$, $\mathbf{\sqrt{5}-2i}$, $\mathbf{\frac{1}{2}i}$

본문 해설

❷ 두 복소수 $a+bi$와 $c+di$가 서로 같음을 이야기할 때에는 반드시 a, b, c, d가 실수이어야 한다.

지/도/자/료 서로 같을 조건에 대한 여러 가지 정리

1. 실수 a, b에 대하여
$a^2+b^2=0$이면 $a=0$, $b=0$
또 $a=0$, $b=0$이면 $a^2+b^2=0$

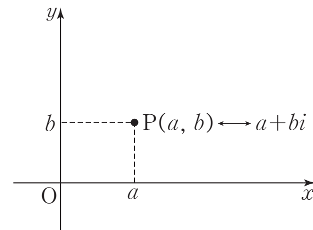
2. 유리수 a, b, c, d와 무리수 $\sqrt{m}$에 대하여
$a+b\sqrt{m}=0$이면 $a=0$, $b=0$
또 $a=0$, $b=0$이면 $a+b\sqrt{m}=0$
$a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$이면 $a=c$, $b=d$
또 $a=c$, $b=d$이면 $a+b\sqrt{m}=c+d\sqrt{m}$

3. 실수 a, b, c, d에 대하여
$a+bi=0$이면 $a=0$, $b=0$
또 $a=0$, $b=0$이면 $a+bi=0$
$a+bi=c+di$이면 $a=c$, $b=d$
또 $a=c$, $b=d$이면 $a+bi=c+di$

4. 실수 a, b에 대하여
$|a|+|b|=0$이면 $a=0$, $b=0$
또 $a=0$, $b=0$이면 $|a|+|b|=0$

읽/기/자/료 복소평면

좌표평면 위에서 임의의 복소수 $a+bi$(a, b는 실수)에 대하여 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 대응될 때, 이 평면을 복소평면 또는 가우스평면이라고 한다.
복소평면 위에서 실수 $x=x+0i$는 x축 위의 점 $(x,\ 0)$으로 나타나고, 허수 $yi=0+yi$는 y축 위의 점 $(0,\ y)$로 나타나므로 x축을 실수축, y축을 허수축이라고 한다.



교과서 63 쪽

예제 **01** 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하여라.

(1) $x+(y+1)i=2+3i$　　(2) $(x-5)+(y+2)i=0$

풀이 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

(1) $x=2$, $y+1=3$이므로　$x=2$, $y=2$

(2) $x-5=0$, $y+2=0$이므로　$x=5$, $y=-2$

답 (1) $x=2$, $y=2$　(2) $x=5$, $y=-2$

문제 **2** 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y의 값을 구하여라.

(1) $x+3yi=6i$　　(2) $(3x+2y)+(x+y)i=-1+i$

켤레복소수란 무엇인가?

❶ a, b가 실수일 때, 복소수 $a+bi$에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 복소수 $a+bi$의 **켤레복소수**라고 하며, 이것을 기호로

$$\overline{a+bi}$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$\overline{a+bi}=a-bi$$

이다. 한편 $\overline{a-bi}=a+bi$이므로 $a+bi$와 $a-bi$는 서로 켤레복소수이다.

'한 켤레의 장갑'과 같이 서로 짝이 되는 복소수를 켤레복소수라고 한다.

❷ 보기 (1) $\overline{2+3i}=2-3i$　(2) $\overline{2i}=-2i$　(3) $\overline{-3}=-3$

문제 **3** 다음 복소수의 켤레복소수를 구하여라.

(1) $5+4i$　　(2) $1-\sqrt{2}i$

(3) $5i$　　(4) -4

사고력 기르기

추론 ▶의사소통 문제 해결

복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라고 할 때, $z=\bar{z}$가 성립하는 복소수 z는 어떤 특징이 있는지 토의하여 보자.

본문 해설

❶ 복소수 $a+bi$의 켤레복소수는 $a+bi$의 허수부분의 부호만 반대로 바꾼 복소수이다. 즉, 허수부분의 부호는

$$+ \rightarrow -,\ - \rightarrow +$$

와 같이 바뀐다.

❷ 실수 a는 $a+0i$로 나타낼 수 있으므로 a의 켤레복소수는

$$a-0i$$

즉, a이다.

2

목표| 복소수가 서로 같을 조건을 이해하게 한다.

풀이| (1) $x=0$, $3y=6$이므로

$\boldsymbol{x=0,\ y=2}$

(2) $3x+2y=-1$ ······ ①

$x+y=1$ ······ ②

①, ②를 연립하여 풀면

$\boldsymbol{x=-3,\ y=4}$

3

목표| 켤레복소수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\boldsymbol{5-4i}$

(2) $\boldsymbol{1+\sqrt{2}i}$

(3) $\boldsymbol{-5i}$

(4) $\boldsymbol{-4}$

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 특별한 경우에 켤레복소수와 원래의 복소수 사이의 관계에 대하여 생각해 보기 위한 문제이다.

풀이| $z=a+bi$ (a, b는 실수)라고 하면 $\bar{z}=a-bi$이다. $z=\bar{z}$, 즉 $a+bi=a-bi$에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $b=-b$이므로 $b=0$이다.

따라서 $z=\bar{z}$일 때, $\boldsymbol{z}$**는 실수이다.**

생각 열기 참/고/자/료

용해란 용질이 용매와 균일하게 섞이는 현상으로 일반적으로 '녹는다'고 표현한다. 예를 들어 물에 설탕을 넣고 섞으면 설탕 분자 하나하나가 물속에 고르게 퍼져 물 분자들과 균일하게 섞인 상태로 어느 부분을 취해도 설탕은 같은 농도로 존재한다. 반면에 물에 식용유를 넣으면 식용유는 물 위에 뜨게 되며 두 물질은 고루 섞이지 않는다. 이와 같은 경우에는 단순히 물리적으로 섞여 있을 뿐 용해되었다고 하지 않는다.

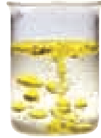
용해의 여부는 물질의 극성과 관계가 깊다. 물을 용매로 사용할 경우, 물은 극성이 큰 물질이기 때문에 자신처럼 극성이 큰 용질을 잘 용해시키며, 반대로 식용유와 같은 극성이 작은 용질은 잘 용해시키지 못한다. 이때 물과 식용유 모두와 잘 섞이는 아세톤을 함께 섞으면 물과 식용유를 섞이게 할 수 있다.

교과서 64 쪽

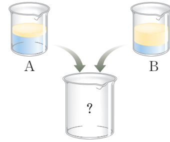
복소수의 사칙계산은 어떻게 하는가?

생각 열기 액체 혼합하기

서로 다른 두 액체를 혼합할 때, 서로 섞이는 경우와 섞이지 않는 경우가 있다. 이를테면 물과 아세톤을 혼합하거나 식용유와 아세톤을 혼합하면 서로 섞이지만 물과 식용유를 혼합할 경우에는 서로 섞이지 않는다.



탐구 활동 비커 A에는 물 a mL와 식용유 b mL가 들어 있고, 비커 B에는 물 c mL와 식용유 d mL가 들어 있다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 두 비커 A, B에 들어 있는 물과 식용유를 큰 비커에 부었을 때, 큰 비커에 담긴 물과 식용유는 어떤 모습인지 말하여 보고, 각각의 양이 얼마인지 구하여 보자.
2. 물과 식용유가 섞이지 않는 것처럼 수학에서 합을 계산할 때 각각 따로 계산하는 것에는 어떤 것이 있는지 말하여 보자.

근호를 포함한 식의 덧셈과 뺄셈에서는 다음과 같이 근호가 있는 수를 하나의 문자로 생각하여 계산하였다.

$$(4+3\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})=(4+2)+(3+1)\sqrt{2}=6+4\sqrt{2}$$
$$(4+3\sqrt{2})-(2+\sqrt{2})=(4-2)+(3-1)\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$$

이와 마찬가지로 복소수의 덧셈과 뺄셈도 허수단위 i를 하나의 문자로 생각하여 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 계산한다.

❶ 즉, a, b, c, d가 실수일 때

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

이다.

예를 들면

$$(4+3i)+(2+i)=(4+2)+(3+1)i=6+4i$$
$$(4+3i)-(2+i)=(4-2)+(3-1)i=2+2i$$

와 같이 계산한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 물과 식용유가 서로 섞이지 않고 혼합되어 있는 것처럼 복소수의 덧셈과 뺄셈을 할 때에도 실수부분과 허수부분을 따로 계산한다는 것을 이해하기 위한 것이다.

1. 물과 식용유는 서로 섞이지 않고 층을 이룬다. 즉, 아래에는 $(a+c)$mL의 물이, 위에는 $(b+d)$mL의 식용유가 위치하게 된다.
2. 두 다항식의 덧셈과 뺄셈을 할 때, 동류항끼리 따로 계산한다. 또 두 실수의 덧셈과 뺄셈을 할 때에도 유리수는 유리수끼리, 무리수는 무리수끼리 계산한다.

예 (1) $(2a+3b)+(5a-2b)$
$=(2a+5a)+(3b-2b)$
$=7a+b$

(2) $(2+3\sqrt{3})-(5-2\sqrt{3})$
$=(2-5)+\{3\sqrt{3}-(-2\sqrt{3})\}$
$=-3+5\sqrt{3}$

본문 해설

❶ 복소수의 덧셈과 뺄셈은 $a+bi$를 실수 a, b를 계수로 가지는 i에 대한 일차식으로 생각하고 계산한다.

읽/기/자/료 실제의 수, 허수

허수(imaginary number)는 그 이름 때문에 상상의 수, 실제로는 존재하지 않는 수로 인식될 수 있다. 그러나 오늘날 허수는 실제의 수이며 꿈을 실현시켜 주는 수로서 공학, 물리학, 역학 등에 쓰이고 있다.

예를 들어 라디오, 텔레비전, 영화 등 여러 음향 매체들의 음향효과를 만들어 주는 회로의 작동 원리를 설명하기 위해서는 복소수와 미분방정식 등의 수학적 이론들이 필요하다.

특히 전기 공학에서는 i가 전류를 뜻하는 약자이기 때문에 복소수를 j로 표현한다.

또 고속으로 비행하는 비행기의 날개가 심한 진동을 일으키는 현상을 나타내는 말인 flutter의 발생 속도를 추정할 때에도 복소수를 도입하면 유용하다.

교과서 65 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

복소수의 덧셈과 뺄셈

a, b, c, d가 실수일 때

(1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

예제 02 다음을 계산하여라.

(1) $(5+4i)+(3-i)$ (2) $(3-2i)-(4+i)$

(3) $3i+(2+4i)$ (4) $5-(1+2i)$

풀이 (1) $(5+4i)+(3-i)=(5+3)+(4-1)i=8+3i$

(2) $(3-2i)-(4+i)=(3-4)+(-2-1)i=-1-3i$

(3) $3i+(2+4i)=(0+2)+(3+4)i=2+7i$

(4) $5-(1+2i)=(5-1)+(0-2)i=4-2i$

답 (1) $8+3i$ (2) $-1-3i$ (3) $2+7i$ (4) $4-2i$

문제 4 다음을 계산하여라.

(1) $(3-4i)+(5+3i)$ (2) $(1+i)-(4-i)$

(3) $(1-7i)+6$ (4) $(-3+i)-10i$

❶ **문제 5** 세 복소수 z_1, z_2, z_3이 각각 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$z_1=2+3i$, $z_2=3-2i$, $z_3=1+i$

(1) z_1+z_2와 z_2+z_1을 구하고, 그 값을 비교하여라.

(2) $(z_1+z_2)+z_3$과 $z_1+(z_2+z_3)$을 구하고, 그 값을 비교하여라.

4

목표| 복소수의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(3-4i)+(5+3i)$

$=(3+5)+(-4+3)i=\mathbf{8-i}$

(2) $(1+i)-(4-i)=(1-4)+(1+1)i=\mathbf{-3+2i}$

(3) $(1-7i)+6=(1+6)+(-7+0)i=\mathbf{7-7i}$

(4) $(-3+i)-10i=(-3+0)+(1-10)i=\mathbf{-3-9i}$

참고| 복소수의 덧셈과 뺄셈의 결과도 복소수이다.

5

목표| 복소수의 덧셈에 대하여 교환법칙과 결합법칙이 성립함을 알게 한다.

풀이| (1) $z_1+z_2=(2+3i)+(3-2i)$

$=(2+3)+(3-2)i$

$=\mathbf{5+i}$

$z_2+z_1=(3-2i)+(2+3i)$

$=(3+2)+(-2+3)i=\mathbf{5+i}$

따라서 $\mathbf{z_1+z_2=z_2+z_1}$이다.

(2) (1)에서 $z_1+z_2=5+i$이고

$z_2+z_3=(3-2i)+(1+i)$

$=(3+1)+(-2+1)i=4-i$

이므로

$(z_1+z_2)+z_3=(5+i)+(1+i)$

$=(5+1)+(1+1)i$

$=\mathbf{6+2i}$

$z_1+(z_2+z_3)=(2+3i)+(4-i)$

$=(2+4)+(3-1)i$

$=\mathbf{6+2i}$

따라서 $\mathbf{(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)}$이다.

본문 해설

❶ 임의의 세 복소수 z_1, z_2, z_3에 대하여

- $z_1+z_2=z_2+z_1$
- $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

이 성립한다. 즉, 복소수에서는 실수에서와 마찬가지로 덧셈에 대하여 교환법칙과 결합법칙이 성립한다.

이를 일반적으로 보이면 다음과 같다.

a, b, c, d, e, f가 실수일 때,

세 복소수 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$, $z_3=e+fi$에 대하여

$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$z_2+z_1=(c+di)+(a+bi)=(c+a)+(d+b)i$

$=(a+c)+(b+d)i$

따라서 $z_1+z_2=z_2+z_1$이다.

또 $z_2+z_3=(c+di)+(e+fi)=(c+e)+(d+f)i$이므로

$(z_1+z_2)+z_3=\{(a+c)+(b+d)i\}+(e+fi)$

$=\{(a+c)+e\}+\{(b+d)+f\}i$

$=(a+c+e)+(b+d+f)i$

$z_1+(z_2+z_3)=(a+bi)+\{(c+e)+(d+f)i\}$

$=\{a+(c+e)\}+\{b+(d+f)\}i$

$=(a+c+e)+(b+d+f)i$

따라서 $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$이다.

본문 해설

❶ 복소수의 나눗셈은 공식을 이용하여 구하는 것보다 분모의 켤레복소수를 분모와 분자에 곱하여 분모를 실수로 만들어 계산하는 것이 더 편리하다.

지/도/자/료

1. 허수단위 i의 거듭제곱인 i^n의 값에는 다음과 같은 규칙성이 있다.

$i^2=-1$

$i^3=i^2\cdot i=-i$

$i^4=i^3\cdot i=(-i)\cdot i=-i^2=1$

$i^5=i^4\cdot i=i$

$i^6=i^5\cdot i=i\cdot i=i^2=-1$

$i^7=i^6\cdot i=(-1)\cdot i=-i$

$i^8=i^7\cdot i=(-i)\cdot i=-i^2=1$

$\vdots$

$$i^n=\begin{cases} i & (n=4k-3\text{일 때}) \\ -1 & (n=4k-2\text{일 때}) \\ -i & (n=4k-1\text{일 때}) \\ 1 & (n=4k\text{일 때}) \end{cases} \quad (\text{단, } k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

따라서 i^{2014}의 값을 구해 보면

$2014=4\times 503+2$이므로

$i^{2014}=(i^4)^{503}\cdot i^2=1\cdot i^2=-1$

2. 실수와 허수의 제곱의 값 비교

복소수 $a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

(1) $b=0$일 때, $(a+bi)^2=a^2\geq 0$

(2) $a=0$, $b\neq 0$일 때, $(a+bi)^2=-b^2<0$

(3) $a\neq 0$, $b\neq 0$일 때, $2ab\neq 0$이므로

$(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi=(\text{허수})$

3. 켤레복소수의 성질

(1) $\overline{\overline{z}}=z$

(2) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(4) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$

(5) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(6) $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$

교과서 66 쪽

근호를 포함한 식의 곱셈에서는 다음과 같이 근호가 있는 수를 하나의 문자로 생각하여 계산하였다.

$$(4+3\sqrt{2})(2+\sqrt{2})=8+4\sqrt{2}+6\sqrt{2}+3(\sqrt{2})^2$$
$$=(8+6)+(4+6)\sqrt{2}=14+10\sqrt{2}$$

복소수의 곱셈도 허수단위 i를 하나의 문자로 생각하고 $i^2=-1$임을 이용하여 계산한다. 즉, a, b, c, d가 실수일 때

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$$
$$=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

이다. 예를 들면

$$(4+3i)(2+i)=8+4i+6i+3i^2$$
$$=(8-3)+(4+6)i=5+10i$$

와 같이 계산한다.

한편 근호를 포함한 식의 나눗셈에서는 다음과 같이 분모를 유리화하여 계산하였다.

$$\frac{4+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{(4+3\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{8-4\sqrt{2}+6\sqrt{2}-6}{2^2-(\sqrt{2})^2}$$
$$=\frac{(8-6)+(-4+6)\sqrt{2}}{2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$$

● 켤레복소수를 분모, 분자에 곱하는 것은 무리수에서 분모를 유리화하는 것과 같은 원리이다.

● $(c+di)(c-di)$
$=c^2-(di)^2$
$=c^2+d^2$

❶ 복소수의 나눗셈도 분모의 켤레복소수를 분모, 분자에 곱하여 분모를 실수로 만들어 계산한다. 즉, a, b, c, d가 실수이고 $c+di\neq 0$일 때

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-(di)^2}$$
$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

이다. 예를 들면

$$\frac{4+3i}{2+i}=\frac{(4+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{8-4i+6i-3i^2}{2^2-i^2}$$
$$=\frac{(8+3)+(-4+6)i}{4+1}=\frac{11}{5}+\frac{2}{5}i$$

와 같이 계산한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

복소수의 곱셈과 나눗셈

a, b, c, d가 실수일 때

(1) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(2) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (단, $c+di\neq 0$)

6

목표| 복소수의 곱셈과 나눗셈을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(3+2i)(1-2i)=3-6i+2i-4i^2$

$=3-4i+4=\mathbf{7-4i}$

(2) $(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=\mathbf{2i}$

(3) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i+i^2}{1-i^2}$

$=\dfrac{1-2i-1}{1-(-1)}=\dfrac{-2i}{2}=\mathbf{-i}$

(4) $\dfrac{2}{3+2i}=\dfrac{2(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{6-4i}{9-4i^2}$

$=\dfrac{6-4i}{9-(-4)}=\dfrac{6-4i}{13}=\mathbf{\dfrac{6}{13}-\dfrac{4}{13}i}$

참고| 복소수의 곱셈과 나눗셈의 결과도 복소수이다.

교과서 67 쪽

예제 03 다음을 계산하여라.

(1) $(4+i)(-1+2i)$ (2) $-i(3+2i)$

(3) $\dfrac{1-2i}{2+i}$ (4) $\dfrac{5+i}{2i}$

풀이 (1) $(4+i)(-1+2i)=-4+8i-i+2i^2=-4+7i-2=-6+7i$

(2) $-i(3+2i)=-3i-2i^2=2-3i$

(3) $\dfrac{1-2i}{2+i}=\dfrac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{2-i-4i+2i^2}{2^2-i^2}=\dfrac{2-5i-2}{4-(-1)}=\dfrac{-5i}{5}=-i$

(4) $\dfrac{5+i}{2i}=\dfrac{(5+i)i}{2i\cdot i}=\dfrac{5i+i^2}{2i^2}=\dfrac{-1+5i}{-2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$

답 (1) $-6+7i$ (2) $2-3i$ (3) $-i$ (4) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$

문제 6 다음을 계산하여라.

(1) $(3+2i)(1-2i)$ (2) $(1+i)^2$

(3) $\dfrac{1-i}{1+i}$ (4) $\dfrac{2}{3+2i}$

문제 7 세 복소수 z_1, z_2, z_3이 각각 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$$z_1=2-i,\quad z_2=2+i,\quad z_3=3+5i$$

(1) z_1z_2와 z_2z_1을 구하고, 그 값을 비교하여라.
(2) $(z_1z_2)z_3$과 $z_1(z_2z_3)$을 구하고, 그 값을 비교하여라.
(3) $z_1(z_2+z_3)$과 $z_1z_2+z_1z_3$을 구하고, 그 값을 비교하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)의 켤레복소수를 $\overline{z}$라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자. (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

(1) $z+\overline{z}$, $z-\overline{z}$, $z\overline{z}$를 구하고, 그 특징을 말하여 보자.

(2) $\dfrac{\overline{z}}{z}$, $\dfrac{z}{\overline{z}}$를 구하고, 그 값을 비교하여 보자.

7

목표| 복소수의 곱셈에 대하여 교환법칙과 결합법칙, 분배법칙이 성립함을 알게 한다.

풀이| (1) $z_1z_2=(2-i)(2+i)$
$=4+2i-2i-i^2=4-(-1)$
$=\mathbf{5}$

$z_2z_1=(2+i)(2-i)$
$=4-2i+2i-i^2=4-(-1)=\mathbf{5}$

따라서 $\boldsymbol{z_1z_2=z_2z_1}$이다.

(2) (1)에서 $z_1z_2=5$이고

$z_2z_3=(2+i)(3+5i)$
$=6+10i+3i+5i^2=1+13i$

이므로

$(z_1z_2)z_3=5(3+5i)=\mathbf{15+25}\boldsymbol{i}$

$z_1(z_2z_3)=(2-i)(1+13i)$
$=2+26i-i-13i^2=\mathbf{15+25}\boldsymbol{i}$

따라서 $\boldsymbol{(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)}$이다.

(3) (1)에서 $z_1z_2=5$이고

$z_2+z_3=(2+i)+(3+5i)=5+6i$

$z_1z_3=(2-i)(3+5i)=6+10i-3i-5i^2$
$=11+7i$

이므로

$z_1(z_2+z_3)=(2-i)(5+6i)$
$=10+12i-5i-6i^2=\mathbf{16+7}\boldsymbol{i}$

$z_1z_2+z_1z_3=5+(11+7i)=\mathbf{16+7}\boldsymbol{i}$

따라서 $\boldsymbol{z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3}$이다.

참고| 임의의 세 복소수 z_1, z_2, z_3에 대하여

- $z_1z_2=z_2z_1$
- $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$
- $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

이 성립한다. 즉, 복소수에서는 실수에서와 마찬가지로 곱셈에 대하여 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립한다.

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 복소수와 켤레복소수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 결과에 대하여 생각해 보게 하기 위한 것이다.

풀이| (1) $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=\mathbf{2}\boldsymbol{a}$

$z-\overline{z}=(a+bi)-(a-bi)=\mathbf{2}\boldsymbol{bi}$

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=\boldsymbol{a^2+b^2}$

따라서 임의의 복소수와 그 켤레복소수를 더하거나 곱하면 실수가 되고, 빼면 허수가 된다.

(2) $\dfrac{\overline{z}}{z}=\dfrac{a-bi}{a+bi}=\dfrac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}=\boldsymbol{\dfrac{(a^2-b^2)-2abi}{a^2+b^2}}$

$\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{a+bi}{a-bi}=\dfrac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}=\boldsymbol{\dfrac{(a^2-b^2)+2abi}{a^2+b^2}}$

따라서 $\dfrac{\overline{z}}{z}$와 $\dfrac{z}{\overline{z}}$는 서로 켤레복소수이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • $\sqrt{3}i$와 $-\sqrt{3}i$를 제곱하여 보고 제곱하여 음수가 되는 수를 살펴봄으로써 음수의 제곱근을 알아보기 위한 것이다.

1. 모든 실수에 대하여 $(\text{실수})^2 \geq 0$이므로 제곱하여 -3이 되는 수는 **실수가 아니다.**

2. $(\sqrt{3}i)^2 = 3 \cdot i^2 = \mathbf{-3}$

$(-\sqrt{3}i)^2 = 3 \cdot i^2 = \mathbf{-3}$

교과서 68 쪽

음수의 제곱근을 어떻게 나타내는가?

탐구 활동 다음 물음에 답하여 보자.

1. 제곱하여 -3이 되는 수가 실수인지 아닌지 말하여 보자.

2. $\sqrt{3}i$와 $-\sqrt{3}i$를 제곱하여 보자.

중③ a가 음이 아닌 실수일 때, 제곱하여 a가 되는 수를 a의 제곱근이라고 한다.

음수의 제곱근에 대하여 알아보자.

$a>0$일 때, $-a$의 제곱근은 방정식

$$x^2=-a$$

의 근이다. 그런데

$$(\sqrt{a}i)^2=ai^2=-a, \quad (-\sqrt{a}i)^2=ai^2=-a$$

이므로 $-a$의 제곱근은 $\sqrt{a}i$와 $-\sqrt{a}i$이다. 여기에서

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$$

로 나타내기로 한다.

즉, 음수의 제곱근은 복소수로 바꾸어 계산한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

음수의 제곱근

$a>0$일 때

(1) $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$

(2) $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}i$이다.

$\sqrt{a}i$, $-\sqrt{a}i$를 $\pm\sqrt{a}i$로 나타낼 수 있다.

보기 (1) $\sqrt{-5}=\sqrt{5}i$

(2) -7의 제곱근은 $\pm\sqrt{7}i$이다.

문제 8 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) -2 (2) -4

(3) $-\frac{1}{16}$ (4) $-\frac{3}{4}$

8

목표 | 음수의 제곱근을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) -2의 제곱근은 $\mathbf{\pm\sqrt{2}i}$

(2) -4의 제곱근은 $\pm\sqrt{4}i=\mathbf{\pm 2i}$

(3) $-\frac{1}{16}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{\frac{1}{16}}i=\mathbf{\pm\frac{1}{4}i}$

(4) $-\frac{3}{4}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{\frac{3}{4}}i=\mathbf{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

읽/기/자/료 음수의 제곱근

다음은 서기 850년경 인도의 수학자 마하비라가 음수의 제곱근 문제에 대하여 언급한 것이다.

“양수의 제곱은 양수이고, 음수의 제곱도 양수이기 때문에 양수의 제곱근은 양과 음의 두 종류가 있고, 음수는 제곱해서 얻을 수가 없기 때문에 음수의 제곱근이라는 것은 존재하지 않는다.”

이러한 이유로 여러 세기 동안 대다수의 수학자들은 근호 안의 음수 계산을 수학적 연구 대상으로 생각하지 않았다.

그러다가 이탈리아의 수학자 카르다노(Cardano, G. ; 1501~1576)가 삼차방정식의 일반적인 해를 구하는 과정에 음수의 제곱근이 필요함을 인식하였다.

그는 다음과 같은 문제

‘10을 두 부분으로 나누고 그 두 부분을 곱하여 40이 되도록 할 수 있는가?’

즉, $x(10-x)=40$을 성립시키는 x를 구하는 문제에 대하여

$x=5\pm\sqrt{-15}$

라는 답을 얻어 음수의 제곱근을 소개하였다.

그러나 “이러한 식은 허의 가상 아래에서 풀었다.”라고 단서를 제시하여 위와 같은 수를 실제의 수로 인정하지는 않았다.

하지만 카르다노가 삼차방정식의 해법을 발견한 이후로 음수의 제곱근은 많은 수학자들이 관심을 갖기 시작하였다.

본문 해설

❶ 음수의 제곱근에 대한 사칙연산은 $a>0$일 때, $\sqrt{-a}$를 $\sqrt{a}i$로 놓고 복소수의 사칙연산의 원리를 이용하여 계산한다.

예를 들어 $a>0$, $b>0$일 때

$$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{a}i\cdot\sqrt{b}i=\sqrt{ab}i^2=-\sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}i}=\frac{\sqrt{a}i}{\sqrt{b}i^2}=-\frac{\sqrt{a}i}{\sqrt{b}}=-\sqrt{-\frac{a}{b}}$$

교과서 69 쪽

예제 04 다음을 계산하여 $a+bi$ (a, b는 실수)의 꼴로 나타내어라.

(1) $\sqrt{-12}-\sqrt{-3}$ (2) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}$ (3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$

풀이 (1) $\sqrt{-12}-\sqrt{-3}=\sqrt{12}i-\sqrt{3}i=2\sqrt{3}i-\sqrt{3}i=\sqrt{3}i$

(2) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=(\sqrt{2}i)(\sqrt{3}i)=\sqrt{6}i^2=-\sqrt{6}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}i}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{2}i\cdot i}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{2}i^2}=\dfrac{\sqrt{3}i}{-\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

(2) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}$을 $\sqrt{(-2)(-3)}$과 같이 계산하지 않도록 주의한다.

답 (1) $\sqrt{3}i$ (2) $-\sqrt{6}$ (3) $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

문제 9 다음을 계산하여 $a+bi$ (a, b는 실수)의 꼴로 나타내어라.

(1) $\sqrt{-2}+\sqrt{-8}$ (2) $\sqrt{-3}\sqrt{-6}$

(3) $\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-2}}$ (4) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$

창의 UP

다음이 성립함을 설명하여라.

(1) $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이다.

(2) $a<0$, $b>0$이면 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$이다.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

수학의 역사에서 수가 확장되어 온 과정을 조사하여라.

9

목표| $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$임을 알고, 이를 이용하여 식의 계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{-2}+\sqrt{-8}=\sqrt{2}i+2\sqrt{2}i=\mathbf{3\sqrt{2}i}$

(2) $\sqrt{-3}\sqrt{-6}=(\sqrt{3}i)(\sqrt{6}i)=\sqrt{18}i^2=\mathbf{-3\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{6}i}{\sqrt{2}i}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\mathbf{\sqrt{3}}$

(4) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}i}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}=\dfrac{3}{i}=\dfrac{3i}{i^2}=\dfrac{3i}{-1}=\mathbf{-3i}$

창의 UP

출제 의도| 양수의 제곱근의 성질은 음수의 제곱근에 대하여 성립하지 않는 경우가 있음을 주의하게 하기 위한 것이다.

풀이| (1) $a=-x$, $b=-y$ $(x>0,\ y>0)$라고 하면

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{-x}\sqrt{-y}=(\sqrt{x}i)(\sqrt{y}i)=\sqrt{xy}i^2$$
$$=-\sqrt{xy}=-\sqrt{ab}$$

(2) $a=-x$ $(x>0)$라고 하면

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{-x}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}i}=\frac{\sqrt{b}\cdot i}{\sqrt{x}i\cdot i}=\frac{\sqrt{b}i}{-\sqrt{x}}$$
$$=-\sqrt{\frac{b}{x}}i=-\sqrt{-\frac{b}{x}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$$

참고| • $a>0$, $b>0$일 때

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab},\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

• $a>0$, $b<0$일 때

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab},\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$$

• $a<0$, $b>0$일 때

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab},\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

• $a<0$, $b<0$일 때

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab},\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

단원 과제

목표| 수학의 역사에서 수가 확장되어 온 과정을 알아보기 위한 것이다.

풀이| 원시 사회에서 가장 중요한 재산인 가축들의 수를 세기 시작하면서 자연수의 역사는 시작되었다.
3세기경 고대 그리스의 디오판토스(Diophantos ; ?200~?284)는 방정식의 해가 음수가 될 경우에는 해가 없는 것으로 취급하였다. 하지만 이탈리아의 수학자 카르다노(Cardano, G. ; 1501~1576)는 그의 유명한 저서인 "아르스 마그나"에 방정식의 일반적인 성질을 자세하고 체계적으로 서술하며 허수의 개념을 확립하였다. 1550년 이탈리아의 수학자 봄벨리(Bombelli, Raphael ; 1526~1572)가 $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$ 등을 사용하기도 하였으나 이는 수로 받아들여지지 않았고 17세기에 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646~1716)가 처음으로 허수라고 부르기 시작하였다. 이 수는 현대에 이르러 수학뿐만 아니라 기계 공학이나 전기 공학 등에서 없어서는 안 될 중요한 수가 되었다.

02 이차방정식의 실근과 허근

소단원 지도 목표

① 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 알게 한다.
② 근의 공식을 이용하여 이차방정식을 풀고, 이를 실근과 허근으로 구분할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 이차방정식의 계수는 실수인 경우만 다루고, 근은 복소수의 범위까지 다루도록 한다.

2. 완전제곱식이나 근의 공식을 이용하면 계수가 실수인 모든 이차방정식의 근을 복소수의 범위에서 구할 수 있음을 이해하게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 실근 (實根, real root)
• 허근 (虛根, imaginary root)

교과서 70 쪽

02 이차방정식의 실근과 허근

● 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다.

실근과 허근이란 무엇인가?

생각 열기

황금비

황금분할이란 한 선분을 두 부분으로 나눌 때, 전체에 대한 긴 부분의 비와 긴 부분에 대한 짧은 부분의 비가 같도록 나눈 것을 말한다. 이때 이 비를 황금비라고 하며 약 1 : 1.618이다. 고대 이집트의 쿠푸 왕의 피라미드, 컴퓨터 화면 등에서 황금비를 찾아볼 수 있다.

탐구 활동

다음 그림과 같이 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{AB}=x$, $\overline{BC}=1$이라고 할 때, 물음에 답하여 보자.

1. $\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{BC}$이면 $\overline{AB}:\overline{BC}$는 황금비이다. 이때 x에 대한 방정식을 세우고, 그 해를 구하여 보자.

2. $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{BC}$라고 할 때, x에 대한 방정식을 세워 보자. 이 방정식의 해를 실수의 범위에서 구할 수 있는지 말하여 보자.

중학교에서는 이차방정식의 근을 실수의 범위에서만 다루었다. 지금부터는 복소수의 범위까지 확장하여 이차방정식의 근을 다루기로 한다.

이를테면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로 이차방정식 $x^2+1=0$은 실수의 범위에서는 근을 가지지 않는다. 그러나 $i^2=(-i)^2=-1$이므로 복소수의 범위에서는 $x=\pm i$인 근을 가진다.

생각 열기 참/고/자/료

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …를 잘 살펴보면 어떤 규칙이 있음을 알 수 있다. 앞의 두 수를 더하면 그 다음 수가 되는 규칙인데 이러한 수의 배열을 '피보나치 수열'이라고 한다.
연속된 두 피보나치 수의 비를 계산하면

$\frac{1}{1}=1$, $\frac{2}{1}=2$, $\frac{3}{2}=1.5$, $\frac{5}{3}=1.666\cdots$, $\frac{8}{5}=1.6$, $\frac{13}{8}=1.625$, $\frac{21}{13}=1.615\cdots$, …

가 된다. 이와 같은 방식으로 비를 계속 구해 보면 인간이 가장 아름답다고 여겨왔던 황금비 1.618…에 가까워짐을 알 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 이 탐구 활동은 중학교에서 배웠던 근의 공식을 복습하고, 실수의 범위에서 구했던 이차방정식의 해를 복소수의 범위까지 확장할 필요성을 느끼도록 하기 위한 것이다.

1. $\overline{AC}=x+1$이므로 $(x+1):x=x:1$이고
$x^2-x-1=0$에서 근의 공식을 이용하여 해를 구하면
$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

2. $x:(x+1)=(x+1):1$이므로
$x^2+x+1=0$에서 근의 공식을 이용하여 해를 구하면
$x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
따라서 실수의 범위에서 해를 구할 수 없다.

교과서 71 쪽

❶ 계수 a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 근의 공식은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이다. 위의 이차방정식의 근의 공식에서

$b^2-4ac\geq0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$는 실수

$b^2-4ac<0$이면 $\sqrt{b^2-4ac}$는 허수

이다.

따라서 계수가 실수인 이차방정식은 복소수의 범위에서 반드시 근을 가진다는 것을 알 수 있다.

이때 실수인 근을 **실근**이라 하고, 허수인 근을 **허근**이라고 한다.

특별한 언급이 없는 한 이차방정식의 계수는 실수이고, 방정식의 해는 복소수의 범위에서 구한다.

예제 01 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀고, 실근인지 허근인지 말하여라.

(1) $x^2+x-5=0$ (2) $x^2-2x+3=0$

풀이 (1) $a=1$, $b=1$, $c=-5$를 근의 공식에 대입하면

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-5)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}\text{ (실근)}$$

(2) $a=1$, $b=-2$, $c=3$을 근의 공식에 대입하면

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}$$

$$=\frac{2\pm2\sqrt{2}i}{2}=1\pm\sqrt{2}i\text{ (허근)}$$

답 (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$ (실근) (2) $x=1\pm\sqrt{2}i$ (허근)

문제 1 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀고, 실근인지 허근인지 말하여라.

(1) $x^2-6x-1=0$ (2) $2x^2-3x+5=0$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

일차항의 계수가 짝수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0$ $(a\neq0)$의 근을 간단히 나타내어 보자.

사고력 기르기 추론

출제 의도| 일차항의 계수가 짝수인 이차방정식의 근의 공식을 유도하여 활용하도록 하기 위한 문제이다.

풀이| 근의 공식에 b대신 $2b'$을 대입하면

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}$$

$$=\boldsymbol{\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}}$$

임을 알 수 있다.

참고| 일차항의 계수가 $2b'$의 꼴, 즉 짝수일 때의 근의 공식을 이용하면 계산이 간편할 뿐 아니라 계산의 실수도 줄일 수 있다. 그러나 짝수일 때의 근의 공식을 반드시 이용해야만 하는 것은 아니다.

본문 해설

❶ 계수가 실수인 이차방정식이 허근을 가지면 근의 공식에서 그 켤레복소수도 근이 됨을 알 수 있다.

1

목표| 근의 공식을 이용하여 이차방정식의 해를 구하고 그 해가 실근인지 허근인지 판별할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a=1$, $b=-6$, $c=-1$을 근의 공식에 대입하면

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{40}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt{10}}{2}=\boldsymbol{3\pm\sqrt{10}}\textbf{ (실근)}$$

(2) $a=2$, $b=-3$,$c=5$를 근의 공식에 대입하면

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot5}}{2\cdot2}=\frac{3\pm\sqrt{-31}}{4}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{-31}}{4}=\boldsymbol{\frac{3\pm\sqrt{31}i}{4}}\text{ (허근)}$$

지/도/자/료 이차방정식의 여러 가지 풀이 방법

1. 인수분해

이차방정식 $2x^2+7x-4=0$의 해는

$2x^2+7x-4=(x+4)(2x-1)=0$에서

$x+4=0$ 또는 $2x-1=0$, 즉 $x=-4$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

2. 제곱근

이차방정식 $4x^2-7=0$의 해는

$4x^2=7$에서 $x^2=\frac{7}{4}$, $x=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

3. 완전제곱식

이차방정식 $x^2-8x+6=0$의 해는

$x^2-8x=-6$에서 $x^2-8x+16=-6+16$

$(x-4)^2=10$, $x-4=\pm\sqrt{10}$, $x=4\pm\sqrt{10}$

4. 근의 공식

이차방정식 $x^2+2x-5=0$의 해는

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-5)}}{2\times1}=\frac{-2\pm\sqrt{24}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{6}}{2}$$

$$=-1\pm\sqrt{6}$$

03 판별식

소단원 지도 목표

① 이차방정식의 판별식의 뜻을 알게 한다.
② 판별식을 이용하여 계수가 실수인 이차방정식의 근을 판별할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 판별식은 이차방정식의 계수가 실수인 범위에서만 사용할 수 있음을 알게 한다.
2. 이차방정식의 근의 공식을 이용하면 실제로 근을 구하지 않고도 b^2-4ac의 부호에 따라 양수이면 서로 다른 두 실근, 0이면 중근, 음수이면 허근이 됨을 알게 한다.
3. 이차방정식에서 실제로 근을 구하지 않고 그 근이 실근인지 허근인지 판별하는 방법은 함수와 기하 영역에서 자주 활용되고 있음을 알게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 판별식(判別式, discriminant)

교과서 72쪽

03 판별식

● 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.

이차방정식에서 판별식이란 무엇인가?

생각 열기 당도 측정기

당도 측정기는 과일의 당도를 측정하는 기계로, 과일에 빛을 비추었을 때 반사되어 나오는 빛을 이용하여 당도를 측정한다. 당도 측정기를 사용하면 과일을 직접 먹어 보지 않고도 추수하기에 적합한 시기를 알 수 있으며, 맛있는 과일을 살 수 있다. 당도 측정기와 같이 이차방정식의 근을 직접 구하지 않고도 근이 실근인지 허근인지 알 수 있는 방법이 있다.

탐구 활동 세 이차방정식 $x^2-2x-2=0$, $x^2-2x+1=0$, $x^2-2x+2=0$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 근의 공식을 이용하여 세 이차방정식의 근을 각각 구하여 보자.
2. 세 이차방정식을 서로 다른 두 실근, 중근, 서로 다른 두 허근을 가지는 경우로 나누어 보자.

이차방정식의 근을 직접 구하지 않고, 근이 실근인지 허근인지를 판별하는 방법에 대하여 알아보자.

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이므로 근이 실근인지 허근인지는 근호 안에 있는 b^2-4ac의 부호에 의하여 결정된다. 즉,

(i) $b^2-4ac>0$이면 서로 다른 두 실근
(ii) $b^2-4ac=0$이면 중근(실근)
(iii) $b^2-4ac<0$이면 서로 다른 두 허근

을 가진다.

생각 열기 참/고/자/료

당도의 단위는 브릭스(Brix%)를 많이 이용하는데, 용액 100 g에 1 g의 당이 있으면 1 브릭스, x g의 당이 있으면 x 브릭스가 된다.
예전부터 주로 사용되었던 당도 측정기는 과즙을 당도 측정기에 떨어뜨려 당도를 확인하는 방식이었으나 과일에 손상을 입히는 등 여러 단점이 있었다. 최근에는 과일을 손상시키지 않고도 빛을 투과시켜 과일의 당도를 측정하는 비파괴 당도 측정기가 개발 및 연구되고 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 근의 공식을 이용하여 세 이차방정식의 근을 구하여 보고, 근은 어떤 수가 되는지 구별하여 판별식의 이해를 돕기 위한 것이다.

1. $x^2-2x-2=0$의 근을 구하면

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}$$
$$=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=\mathbf{1\pm\sqrt{3}}$$

$x^2-2x+1=0$의 근을 구하면

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$$
$$=\frac{2\pm\sqrt{0}}{2}=\mathbf{1}\ \textbf{(중근)}$$

$x^2-2x+2=0$의 근을 구하면

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$$
$$=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\mathbf{1\pm i}$$

2. $x^2-2x-2=0$은 서로 다른 두 실근,
$x^2-2x+1=0$은 중근,
$x^2-2x+2=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

교과서 73 쪽

기호 D는 판별식을 뜻하는 영어 Discriminant의 첫 글자를 따온 것이다.

❶ 이와 같이 b^2-4ac의 부호에 따라 주어진 이차방정식의 근을 판별할 수 있으므로 b^2-4ac를 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$의 **판별식**이라 하고, 보통 기호 D로 나타낸다. 즉, $D=b^2-4ac$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$D\geq 0$이면 실근을 가진다. 또 실근을 가지면 $D\geq 0$이다.

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$의 판별식 $D=b^2-4ac$에 대하여
(1) $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 가진다. 또 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이다.
(2) $D=0$이면 중근(실근)을 가진다. 또 중근을 가지면 $D=0$이다.
(3) $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 가진다. 또 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이다.

참고 일차항의 계수가 짝수인 경우 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0\ (a\neq 0)$의 근은

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

를 이용하여 판별할 수 있다.

예제 01 다음 이차방정식의 근을 판별하여라.

(1) $x^2-5x-2=0$ (2) $x^2-4x+4=0$ (3) $2x^2+x+3=0$

풀이 (1) $D=(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=33>0$
따라서 $x^2-5x-2=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.
(2) $D=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4=0$
따라서 $x^2-4x+4=0$은 중근을 가진다.
(3) $D=1^2-4\cdot 2\cdot 3=-23<0$
따라서 $2x^2+x+3=0$은 서로 다른 두 허근을 가진다.

답 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 중근 (3) 서로 다른 두 허근

다른 풀이 (2) $x^2+2\cdot(-2)x+4=0$에서
$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot 4=4-4=0$$
따라서 $x^2-4x+4=0$은 중근을 가진다.

문제 1 다음 이차방정식의 근을 판별하여라.

(1) $3x^2-2x+2=0$ (2) $6x^2+x-2=0$ (3) $x^2+2\sqrt{2}x+2=0$

1

목표| 판별식을 이용하여 주어진 이차방정식의 근을 판별할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a=3$, $b=-2$, $c=2$를 판별식에 대입하면
$D=(-2)^2-4\cdot 3\cdot 2=-20<0$
따라서 $3x^2-2x+2=0$은 서로 다른 두 허근을 가진다.

(2) $a=6$, $b=1$, $c=-2$를 판별식에 대입하면
$D=1^2-4\cdot 6\cdot(-2)=49>0$
따라서 $6x^2+x-2=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

(3) $a=1$, $b=2\sqrt{2}$, $c=2$를 판별식에 대입하면
$D=(2\sqrt{2})^2-4\cdot 1\cdot 2=0$
따라서 $x^2+2\sqrt{2}x+2=0$은 중근을 가진다.

본문 해설

❶ 이차방정식의 근이 실근인지, 허근인지 판별식으로 판별할 수 있는 것은 계수가 실수일 때이다.
다음과 같이 계수가 복소수인 이차방정식
$x^2-(4+2i)x+(2+4i)=0$ ······ ①
의 판별식은
$D=(4+2i)^2-4(2+4i)$
$=16+16i-4-8-16i$
$=4>0$
이지만, 방정식 ①은
$x^2-(4+2i)x+(2+4i)=\{x-(1+i)\}\{x-(3+i)\}$
이므로 두 허근 $1+i$, $3+i$를 가진다.
따라서 이차방저식의 계수가 실수가 아닌 경우에는 판별식으로 근을 판별할 수 없다.
단, 계수가 복소수일 때에도 판별식의 값이 0이면 근은 중근이다.

읽/기/자/료 판별식

x에 대한 n차방정식
$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0(a_0\neq 0)$
의 근을 α_1, α_2, α_3, $\cdots$, α_n이라고 하면
$D={a_0}^{2(n-1)}(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2\cdots(\alpha_1-\alpha_n)^2$
$\times(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2(\alpha_2-\alpha_5)^2\cdots(\alpha_2-\alpha_n)^2$
$\times\cdots\times(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2$
을 방정식 $f(x)=0$의 판별식이라고 한다.
따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$의 두 근을 α, β라고 하면 판별식 D는
$D=a^2(\alpha-\beta)^2=b^2-4ac$가 된다.
또 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라고 하면 판별식 D는
$D=a^4(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$
$=-27a^2d^2-4ac^3+18abcd-4b^3d+b^2c^2$
이 되고 이 판별식으로 삼차방정식이 중근을 가지는지 여부를 알 수 있다.

2

목표| 판별식을 이용하여 이차방정식의 계수의 값 또는 그 범위를 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2-(2k-1)x+k^2=0$에서
$D=(2k-1)^2-4\cdot1\cdot k^2=-4k+1$

(1) 서로 다른 두 실근을 가질 때, $D>0$이므로
$D=-4k+1>0$, $\boldsymbol{k<\frac{1}{4}}$

(2) 중근을 가질 때, $D=0$이므로
$D=-4k+1=0$, $\boldsymbol{k=\frac{1}{4}}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가질 때, $D<0$이므로
$D=-4k+1<0$, $\boldsymbol{k>\frac{1}{4}}$

3

목표| 판별식을 이용하여 이차방정식이 허근을 가질 때 계수의 범위를 구할 수 있게 한다.

풀이| 이차방정식 $x^2+x+a=0$의 판별식을 D_1이라고 하면 $D_1=1^2-4\cdot1\cdot a=1-4a$
이차방정식 $2x^2-2\sqrt{2}ax+(a+1)^2=0$의 판별식을 D_2라고 하면

$D_2=(2\sqrt{2}a)^2-4\cdot2\cdot(a+1)^2$
$=8a^2-8(a^2+2a+1)$
$=-16a-8$

두 이차방정식 중에서 적어도 하나가 허근을 가지므로
$D_1<0$ 또는 $D_2<0$
즉, $1-4a<0$ 또는 $-16a-8<0$
$a>\frac{1}{4}$ 또는 $a>-\frac{1}{2}$
따라서 구하는 실수 a값의 범위는 $\boldsymbol{a>-\frac{1}{2}}$이다.

사고력 기르기 추론

출제 의도| 계수가 문자인 이차방정식의 판별식을 분석하여 이차방정식의 근을 판별할 수 있게 한다.

풀이| a와 c의 부호가 서로 다르므로 $ac<0$
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$에서 $-4ac>0$, $b^2\geq0$이므로 $D=b^2-4ac>0$이다.
따라서 a와 c의 부호가 서로 다르면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

교과서 74 쪽

예제 02 이차방정식 $x^2-kx+2k=0$이 중근을 가지도록 하는 실수 k의 값을 구하고, 이때의 중근을 구하여라.

풀이 주어진 이차방정식이 중근을 가지려면 판별식 $D=0$이어야 하므로
$$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot(2k)=k^2-8k=k(k-8)=0$$
따라서 $k=0$ 또는 $k=8$이다.
(i) $k=0$일 때, 방정식은 $x^2=0$이므로 중근은 $x=0$
(ii) $k=8$일 때, 방정식은 $x^2-8x+16=0$, $(x-4)^2=0$이므로 중근은 $x=4$

답 $k=0$일 때 $x=0$, $k=8$일 때 $x=4$의 중근을 가진다.

문제 2 이차방정식 $x^2-(2k-1)x+k^2=0$이 다음과 같은 근을 가질 때, 실수 k의 값 또는 그 범위를 구하여라.
(1) 서로 다른 두 실근
(2) 중근
(3) 서로 다른 두 허근

발전 **문제 3** 두 이차방정식 $x^2+x+a=0$, $2x^2-2\sqrt{2}ax+(a+1)^2=0$ 중에서 적어도 하나가 허근을 가질 때, 실수 a값의 범위를 구하여라.

사고력 기르기
▶추론
의사소통
문제 해결

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$에서 a와 c의 부호가 서로 다르면 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가짐을 판별식을 이용하여 설명하여 보자.

04 근과 계수의 관계

소단원 지도 목표

① 이차방정식에서 근과 계수의 관계를 알고, 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 계수만을 이용하여 구할 수 있게 한다.
② 근과 계수의 관계를 이용하여 두 수를 근으로 하는 이차방정식을 구할 수 있게 한다.
③ 이차방정식의 두 근을 이용하여 이차식을 두 일차식의 곱의 꼴로 인수분해할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 이차방정식의 근과 계수의 관계는 실제로 근을 구하지 않고도 계수를 이용하여 두 근의 합과 곱을 알 수 있는 편리한 방법임을 알게 하고, 계수가 실수이면서도 근과 계수의 관계를 추론하기 쉬운 간단한 예를 많이 들어 지도한다.

2. 이차방정식에서 근과 계수의 관계는 방정식의 계수

교과서 75 쪽

04 근과 계수의 관계

● 이차방정식에서 근과 계수의 관계를 이해한다.

이차방정식에서 근과 계수는 어떤 관계가 있는가?

생각 열기

탐구 활동 이차방정식 $2x^2-9x-5=0$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 이차방정식의 근을 구하여 보자.
2. 두 근의 합과 곱을 구하여 보자.

❶ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$의 두 근 α, β를

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

라고 하면 α와 β의 합과 곱은 다음과 같다.

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

가 허수일 때에도 성립하지만, 고등학교 과정에서는 계수가 실수인 것만 다룬다.

3. 이차방정식이 중근을 가지는 경우, 서로 같은 두 실근으로 생각하도록 지도한다.

4. 특별한 언급이 없으면 인수분해는 계수가 유리수인 범위에서 다룬다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 이차방정식의 두 근을 직접 구하지 않고 두 근의 합과 곱을 구하는 방법의 필요성을 느끼게 하려는 것이다.

1. $2x^2-9x-5=(2x+1)(x-5)=0$이므로
이차방정식 $2x^2-9x-5=0$의 근은
$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=5$

2. 두 근의 합은 $-\frac{1}{2}+5=\frac{9}{2}$
두 근의 곱은 $-\frac{1}{2}\times5=-\frac{5}{2}$

본문 해설

❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계는 다음과 같이 항등식을 이용하여 유도할 수 있다.
이차방정식
$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$
의 두 근을 α, β라고 하면 인수정리에 의하여
$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$
로 나타낼 수 있다.
$a(x-\alpha)(x-\beta)=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$
이므로
$ax^2+bx+c=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$
위의 식은 x에 대한 항등식이므로
양변의 계수를 비교하면
$b=-a(\alpha+\beta)$, $c=a\alpha\beta$
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

지/도/자/료

n차방정식이 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0\ (a_0\neq0)$의 n개의 해를 α_1, α_2, $\cdots$, α_n이라고 하면 인수정리에 의하여
$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$
이 식의 우변을 전개하면
$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$
$=a_0\{x^n-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)x^{n-1}+(\alpha_1\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n)x^{n-2}$
$+\cdots+(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\}$
양변을 비교하면

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\frac{a_1}{a_0}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

본문 해설

❶ 이차방정식의 근과 계수의 관계는 이차방정식의 계수가 허수일 때에도 성립한다.

1

목표| 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{-3}{1}=3,\ \alpha\beta=\frac{-4}{1}=-4$$

따라서 두 근의 합은 **3**이고, 곱은 **−4**이다.

(2) 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{-6}{2}=3,\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$$

따라서 두 근의 합은 **3**이고, 곱은 $\mathbf{\frac{1}{2}}$이다.

교과서 76 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **이차방정식의 근과 계수의 관계**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$의 두 근을 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

근과 계수의 관계를 이용하면 근을 직접 구하지 않고도 두 근의 합과 곱을 구할 수 있다.

보기 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{-3}{1}=3,\ \alpha\beta=\frac{2}{1}=2$$

문제 1 다음 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구하여라.

(1) $x^2-3x-4=0$ (2) $2x^2-6x+1=0$

예제 01 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

풀이 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-4$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot(-4)=12$

(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$

답 (1) 12 (2) $\frac{1}{2}$

❷ 문제 2 이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)$ (2) $(\alpha-\beta)^2$

(3) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ (4) $\alpha^3+\beta^3$

발전 문제 3 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값을 구하여라.

2

목표| 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=5$

(1) $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$
$=5+4+1=\mathbf{10}$

(2) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=4^2-4\cdot5=\mathbf{-4}$

(3) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$
$=\frac{4^2-2\cdot5}{5}=\mathbf{\frac{6}{5}}$

(4) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=4^3-3\cdot5\cdot4=\mathbf{4}$

본문 해설

❷ 이차방정식 $x^2-4x+5=0$과 같은 계수가 실수이면서 서로 다른 두 허근을 갖는 이차방정식의 경우, 두 근의 합이나 곱은 실수가 된다. 그 이유는 서로 다른 두 허근을 갖는 이차방정식의 두 허근은 서로 켤레복소수이므로 두 허근의 합과 곱은 실수이기 때문이다.

3

목표| 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=3+2\sqrt{1}=5$

$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\geq0$이므로 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}$

따라서 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\mathbf{\sqrt{5}}$이다.

교과서 77 쪽

두 수를 근으로 하는 이차방정식을 어떻게 구하는가?

두 수 α, β를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은 다음과 같다.

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

이 식을 전개하여 정리하면

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 근의 합

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

두 근의 곱

두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 α, β를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

예제 02 두 수 $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

풀이 $\alpha=1+\sqrt{2}$, $\beta=1-\sqrt{2}$라고 하면

$\alpha+\beta=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$, $\alpha\beta=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-2x-1=0$이다.

답 $x^2-2x-1=0$

문제 4 다음 두 수를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

(1) $2,\ -1$ (2) $1+i,\ 1-i$

❶ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$의 두 근을 α, β라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

이다. 따라서 이차식 ax^2+bx+c는 다음과 같이 인수분해된다.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

본문 해설

❶ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$이 두 근 α, β를 가지면 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$으로 인수분해된다.

따라서 두 수 α, β를 근으로 하는 이차방정식은

$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=0\ (a\neq0)$

으로 나타낼 수 있다.

또 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$이 중근 α를 가지면 $a(x-\alpha)^2=0$으로 인수분해된다.

따라서 α를 중근으로 하는 이차방정식은

$a(x-\alpha)^2=0\ (a\neq0)$

으로 나타낼 수 있다.

4

목표| 주어진 두 수를 근으로 하는 이차방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\alpha=2$, $\beta=-1$이라고 하면

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-2$

따라서 구하는 이차방정식은

$\boldsymbol{x^2-x-2=0}$

(2) $\alpha=1+i$, $\beta=1-i$라고 하면

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=2$

따라서 구하는 이차방정식은

$\boldsymbol{x^2-2x+2=0}$

지/도/자/료

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$의 두 근을 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

이때 다음 이차방정식을 만들어 보자.

(1) $-\alpha$, $-\beta$를 두 근으로 갖는 이차방정식

(두 근의 합)$=-\alpha-\beta=-(\alpha+\beta)=\frac{b}{a}$

(두 근의 곱)$=(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

이므로 이차방정식은

$x^2-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

$ax^2-bx+c=0\ (a\neq0)$

(2) $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 갖는 이차방정식

(두 근의 합)$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{c}$

(두 근의 곱)$=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{a}{c}$

이므로 이차방정식은

$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$

$cx^2+bx+a=0\ (c\neq0)$

본문 해설

❶ 계수가 실수인 이차방정식은 복소수의 범위에서 항상 두 개의 근을 가지므로 실수의 범위에서 인수분해할 수 없는 이차식도 복소수의 범위에서는 항상 일차식의 곱으로 인수분해할 수 있다.

교과서 78 쪽

❶ 여기에서 계수가 실수인 모든 이차방정식은 복소수의 범위에서 인수분해됨을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이차식의 인수분해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$의 두 근을 α, β라고 하면

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

예제 03 다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하여라.

(1) x^2-2 (2) x^2-2x+4

풀이 (1) 이차방정식 $x^2-2=0$을 풀면 $x=\pm\sqrt{2}$이므로

$$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

(2) 이차방정식 $x^2-2x+4=0$을 풀면 $x=1\pm\sqrt{3}i$이므로

$$x^2-2x+4=\{x-(1+\sqrt{3}i)\}\{x-(1-\sqrt{3}i)\}$$
$$=(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$$

답 (1) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ (2) $(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$

문제 5 다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하여라.

(1) x^2-5 (2) x^2+6x+3

(3) x^2+9 (4) x^2-4x+6

사고력 기르기

▸추론
의사소통
문제 해결

❷ 서로 다른 두 실근을 가지는 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근의 부호가 다음과 같을 때, 실수 p, q의 부호를 말하고 그 이유를 설명하여 보자.

(1) 모두 양수 (2) 모두 음수 (3) 서로 다른 부호

5

목표| 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해할 수 있게 한다.

풀이| (1) 이차방정식 $x^2-5=0$을 풀면

$x=\pm\sqrt{5}$

$x^2-5=\boldsymbol{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}$

(2) 이차방정식 $x^2+6x+3=0$을 풀면

$x=-3\pm\sqrt{9-3}=-3\pm\sqrt{6}$

$x^2+6x+3=\boldsymbol{(x+3-\sqrt{6})(x+3+\sqrt{6})}$

(3) 이차방정식 $x^2+9=0$을 풀면

$x=\pm3i$

$x^2+9=\boldsymbol{(x+3i)(x-3i)}$

(4) 이차방정식 $x^2-4x+6=0$을 풀면

$x=2\pm\sqrt{4-6}=2\pm\sqrt{2}i$

$x^2-4x+6=\boldsymbol{(x-2-\sqrt{2}i)(x-2+\sqrt{2}i)}$

본문 해설

❷ 이차방정식의 판별식, 두 근의 합, 두 근의 곱의 부호를 살펴보면 두 근이 모두 양수인지, 모두 음수인지, 두 근이 서로 다른 부호를 가지는지 알 수 있다. 특히 두 근이 서로 다른 부호를 가질 때에는 두 근의 곱의 부호만 살펴보면 된다.

사고력 기르기 추론

출제 의도| 계수가 문자인 이차방정식의 두 근의 부호를 알 때, 근과 계수의 관계를 이용하여 계수의 부호를 구할 수 있게 하려는 것이다.

풀이| $x^2+px+q=0$의 두 근을 α, β라고 하면

(1) $\alpha>0$, $\beta>0$이므로 $\alpha+\beta=-p>0$, $\alpha\beta=q>0$

따라서 $\boldsymbol{p<0}$, $\boldsymbol{q>0}$이다.

(2) $\alpha<0$, $\beta<0$이므로 $\alpha+\beta=-p<0$, $\alpha\beta=q>0$

따라서 $\boldsymbol{p>0}$, $\boldsymbol{q>0}$이다.

(3) $\alpha>0$, $\beta<0$이라고 하면 $\alpha+\beta$의 부호는 알 수 없고 $\alpha\beta=q<0$이다. 또 $\alpha<0$, $\beta>0$이라고 하면 $\alpha+\beta$의 부호는 알 수 없고 $\alpha\beta=q<0$이다.

따라서 **$q<0$이고 p의 부호는 알 수 없다.**

교과서 79 쪽

중단원 기초

[해답 p.219]

수준별 학습

1 다음 복소수 중에서 실수, 허수를 각각 찾아라.

i^2, $-\sqrt{-9}$, $-4+\sqrt{3}i$, $\sqrt{(-5)^2}$

01 복소수 복소수의 분류

2 다음을 계산하여라.

(1) $(3+i)+(1-2i)$ (2) $(5-i)-(-1+6i)$

(3) $(3-2i)(4-i)$ (4) $\frac{2+i}{3+2i}$

01 복소수 복소수의 사칙계산

3 다음 이차방정식을 풀고, 실근인지 허근인지 말하여라.

(1) $x^2+x-6=0$ (2) $3x^2+x+1=0$

02 이차방정식의 실근과 허근

4 다음 이차방정식의 근을 판별하여라.

(1) $x^2+2x-2=0$ (2) $x^2+x+1=0$

(3) $\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}=0$ (4) $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$

03 판별식

5 다음 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구하여라.

(1) $x^2+2x-1=0$ (2) $x^2-4x+2=0$

(3) $3x^2+x-1=0$ (4) $-2x^2+x+1=0$

04 근과 계수의 관계

중/단/원 기초

1

목표| 실수와 허수를 구분할 수 있게 한다.

풀이| 실수: i^2, $\sqrt{(-5)^2}$

허수: $-\sqrt{-9}$, $-4+\sqrt{3}i$

2

목표| 복소수의 사칙계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(3+i)+(1-2i)=(3+1)+(1-2)i=\mathbf{4-i}$

(2) $(5-i)-(-1+6i)=(5+1)+(-1-6)i=\mathbf{6-7i}$

(3) $(3-2i)(4-i)=12-3i-8i+2i^2=\mathbf{10-11i}$

(4) $\frac{2+i}{3+2i}=\frac{(2+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$

$=\frac{6-4i+3i-2i^2}{3^2-(2i)^2}=\mathbf{\frac{8}{13}-\frac{1}{13}}i$

3

목표| 이차방정식의 해를 구하고 그 해가 실근인지 허근인지 판별할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$에서

$x=-3$ 또는 $x=2$ (실근)

(2) $a=3$, $b=1$, $c=1$을 근의 공식에 대입하면

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot3\cdot1}}{2\cdot3}=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{6}$

$x=\mathbf{\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{6}}$ **(허근)**

4

목표| 판별식을 이용하여 주어진 이차방정식의 근을 판별할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-2)=1+2=3>0$

따라서 $x^2+2x-2=0$은 **서로 다른 두 실근을 가진다.**

(2) $D=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0$

따라서 $x^2+x+1=0$은 **서로 다른 두 허근을 가진다.**

(3) $D=3^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}=9-5=4>0$

따라서 $\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}=0$은 **서로 다른 두 실근을 가진다.**

(4) $\frac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\cdot3=3-3=0$

따라서 $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$은 **중근을 가진다.**

5

목표| 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 합과 곱을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 이차방정식의 두 근을 α, β라고 하자.

(1) $\alpha+\beta=-\frac{2}{1}=\mathbf{-2}$, $\alpha\beta=\frac{-1}{1}=\mathbf{-1}$

(2) $\alpha+\beta=-\frac{-4}{1}=\mathbf{4}$, $\alpha\beta=\frac{2}{1}=\mathbf{2}$

(3) $\alpha+\beta=\mathbf{-\frac{1}{3}}$, $\alpha\beta=\frac{-1}{3}=\mathbf{-\frac{1}{3}}$

(4) $\alpha+\beta=-\frac{1}{-2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$, $\alpha\beta=\frac{1}{-2}=\mathbf{-\frac{1}{2}}$

중/단/원 기본

교과서 80 쪽

중단원 기본

[해답 p.220]

수준별 학습

1 $i+i^2+i^3+\cdots+i^{100}$을 간단히 하여라.

01 복소수 — 복소수의 사칙계산

2 다음을 계산하여 $a+bi$ (a, b는 실수)의 꼴로 나타내어라.

(1) $5\sqrt{-3}+3\sqrt{-12}$ (2) $\dfrac{\sqrt{-8}-2}{\sqrt{-2}}$

01 복소수 — 음수의 제곱근

3 다음 이차방정식을 풀고, 실근인지 허근인지 말하여라.

(1) $2x^2+9x-5=0$ (2) $x^2+7x-9=0$

(3) $0.2x^2-0.4x+0.3=0$ (4) $x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}=0$

02 이차방정식의 실근과 허근

4 이차방정식 $x^2+2(k-3)x+k^2=0$이 다음과 같은 근을 가질 때, 실수 k의 값 또는 그 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 실근

(2) 중근

(3) 서로 다른 두 허근

03 판별식

5 이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\alpha^3+\beta^3$

(3) $(\alpha-\beta)^2$ (4) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

04 근과 계수의 관계

1

목표| 허수단위 i의 거듭제곱의 성질을 알게 한다.

풀이| $i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$이므로

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{100}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots$

$\quad+i^{96}(i+i^2+i+i^4)$

$=0+0+\cdots+0=\mathbf{0}$

2

목표| 음수의 제곱근에 대한 사칙계산을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $5\sqrt{-3}+3\sqrt{-12}=5\sqrt{3}i+3\sqrt{12}i$

$=5\sqrt{3}i+6\sqrt{3}i=\mathbf{11\sqrt{3}i}$

(2) $\dfrac{\sqrt{-8}-2}{\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{8}i-2}{\sqrt{2}i}=\dfrac{(2\sqrt{2}i-2)(-\sqrt{2}i)}{\sqrt{2}i(-\sqrt{2}i)}$

$=\dfrac{4+2\sqrt{2}i}{2}=\mathbf{2+\sqrt{2}i}$

3

목표| 이차방정식의 해를 구하고 그 해가 실근인지 허근인지 판별할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2x^2+9x-5=(x+5)(2x-1)=0$ 에서

$\mathbf{x=-5}$ **또는** $\mathbf{x=\frac{1}{2}}$ **(실근)**

(2) 근의 공식을 이용하면

$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot(-9)}}{2\cdot1}=\mathbf{\dfrac{-7\pm\sqrt{85}}{2}}$ **(실근)**

(3) $0.2x^2-0.4x+0.3=0$의 양변에 10을 곱하여 근의 공식을 이용하면

$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot3}}{2}=\mathbf{1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i}$ **(허근)**

(4) $x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}=0$의 양변에 9를 곱하여 좌변을 인수분해하면

$(3x-1)^2=0$이므로 $\mathbf{x=\frac{1}{3}}$ **(실근)**

4

목표| 판별식을 이용하여 이차방정식의 계수의 값 또는 그 범위를 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2+2(k-3)x+k^2=0$에서 $\dfrac{D}{4}=-6k+9$

(1) $\dfrac{D}{4}>0$에서 $-6k+9>0$이므로 $\mathbf{k<\frac{3}{2}}$

(2) $\dfrac{D}{4}=0$에서 $-6k+9=0$이므로 $\mathbf{k=\frac{3}{2}}$

(3) $\dfrac{D}{4}<0$에서 $-6k+9<0$이므로 $\mathbf{k>\frac{3}{2}}$

5

목표| 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=4$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\mathbf{-4}$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\mathbf{16}$

(3) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\mathbf{-12}$

(4) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\mathbf{-1}$

교과서 81 쪽

중단원 실력

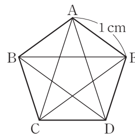
[해답 p.220]

수준별 학습

1 x가 실수일 때, $z=(1+i)x^2+(4-i)x+(3-2i)$가 실수가 되도록 하는 x의 값과 그때의 z의 값을 구하여라. 01 복소수

2 $(1-i)\bar{z}+2iz=3-i$를 만족시키는 복소수 z를 구하여라. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) 01 복소수 복소수의 사칙계산

3 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1 cm인 정오각형의 대각선의 길이를 구하여라. 02 이차방정식의 실근과 허근



4 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+a)x+(k^2-k+b)=0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, 실수 a, b의 값을 구하여라. 03 판별식

5 이차방정식 $x^2-mx+m+2=0$의 서로 다른 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 실수 m의 값을 모두 구하여라. 04 근과 계수의 관계

중/단/원 실력

1

목표| 복소수의 분류를 이해하고 복소수가 실수가 될 조건을 알게 한다.

풀이| $z=(x^2+4x+3)+(x^2-x-2)i$가 실수가 되려면

$x^2-x-2=0$, $(x-2)(x+1)=0$

$x=2$ 또는 $x=-1$

따라서 $\boldsymbol{x=2}$**일 때** $\boldsymbol{z=15}$이고, $\boldsymbol{x=-1}$**일 때** $\boldsymbol{z=0}$이다.

2

목표| 켤레복소수의 성질과 복소수가 서로 같을 조건을 알고 복소수의 사칙계산을 할 수 있게 한다.

풀이| $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$(1-i)\bar{z}+2iz=(1-i)(a-bi)+2i(a+bi)$

$=(a-3b)+(a-b)i=3-i$

에서 $a-3b=3$, $a-b=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-2$

따라서 $\boldsymbol{z=-3-2i}$이다.

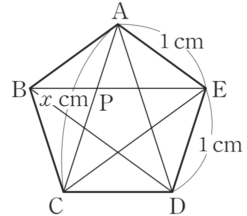
3

목표| 이차방정식의 활용 문제를 해결하고 이차방정식의 실근의 의미를 이해하게 한다.

풀이| 정오각형의 한 내각의 크기는 108°이고 $\triangle$ABE와 $\triangle$ABC는 이등변삼각형이므로

$\angle AEP=36^\circ$, $\angle EAP=72^\circ$

$\triangle$EAP와 $\triangle$ACD는 는 꼭지각의 크기가 36°인 이등변삼각형이므로 닮음이고, 대각선의 길이 $\overline{AC}$를 x cm라고 하면



$\overline{AC}:\overline{EA}=\overline{CD}:\overline{AP}$에서

$x:1=1:(x-1)$

$x(x-1)=1$, $x^2-x-1=0$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

따라서 대각선의 길이는 $\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ **cm**이다.

4

목표| 판별식을 이용하여 이차방정식의 계수의 값 또는 그 범위를 구할 수 있게 한다.

풀이| 실수 k의 값에 관계없이

$\dfrac{D}{4}=(2a+1)k+a^2-b=0$이므로 $2a+1=0$, $a^2-b=0$

따라서 $\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{2}}$, $\boldsymbol{b=\dfrac{1}{4}}$이다.

5

목표| 근과 계수의 관계를 이용하여 이차방정식이 정수해를 가질 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이| 이차방정식 $x^2-mx+m+2=0$의 서로 다른 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면 $\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=m+2$

$\alpha+\beta=m=\alpha\beta-2$이므로 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)=2$

$(\alpha-1)(\beta-1)=3$

문제의 조건에서 α, β $(\alpha<\beta)$는 정수이므로

$\alpha-1=1$, $\beta-1=3$ 또는 $\alpha-1=-3$, $\beta-1=-1$

$\alpha=2$, $\beta=4$ 또는 $\alpha=-2$, $\beta=0$

따라서 구하는 m의 값은 $\boldsymbol{m=6}$ **또는** $\boldsymbol{m=-2}$이다.

2 이차방정식과 이차함수

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 이차함수와 이차방정식의 관계를 이해하게 한다.

② 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하게 한다.

③ 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 이차함수와 이차방정식의 관계	이차함수와 이차방정식의 관계
02 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계	이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계
03 이차함수의 최대, 최소	이차함수의 최대, 최소
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 82 쪽

2 이차방정식과 이차함수

한계를 뛰어넘다.

패럴림픽(Paralympics), 즉 국제 장애인 올림픽은 1960년 로마 하계 장애인 올림픽, 1976년 외른셸스비크 동계 장애인 올림픽을 시작으로 현재는 올림픽 개최국에서 동반 개최되고 있다. 2012년 제14회 런던 하계 장애인 올림픽에서는 165개국에서 4250여 명의 선수가 참가하였으며, 양궁, 육상, 사격, 좌식 배구, 휠체어 농구 등 20개 종목의 경기가 열렸다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 92쪽

휠체어 농구 경기에서 농구공의 높이를 식으로 표현할 수 있을까?

들어가면서 이 단원에서는 이차함수의 그래프와 이차방정식의 근 사이의 관계를 알아본다. 또 이차함수의 그래프와 직선을 그려 보지 않고도 위치 관계를 알 수 있도록 한다.

또한 중학교에서 다루었던 x값의 범위가 실수 전체일 때 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 방법을 복습하고 더 나아가 x값의 범위가 제한되어 있을 때, 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 방법을 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 이차함수와 이차방정식의 관계를 설명할 수 있다.	상	이차함수와 이차방정식의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수를 구할 수 있다.
	하	이차함수의 그래프를 보고 이차방정식의 근의 개수를 말할 수 있다.
2. 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 설명할 수 있다.	상	이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 설명하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구할 수 있다.
	하	이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계(두 점에서 만난다, 한 점에서 만난다, 만나지 않는다.)를 말할 수 있다.
3. 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	상	이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하고, 이를 이용한 문제를 해결할 수 있다.
	중	x의 범위가 주어진 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있다.
	하	주어진 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 찾을 수 있다.

교과서 83 쪽

01 이차함수와 이차방정식의 관계

● 이차함수와 이차방정식의 관계를 이해한다.

이차함수와 이차방정식은 어떤 관계가 있는가?

생각 열기

물 로켓

물 로켓은 공기의 압력을 이용하여 플라스틱 용기에 든 물을 뒤로 뿜어 생기는 추진력으로 용기를 멀리 날리는 장치이다. 비스듬히 발사된 물 로켓은 포물선을 그리며 날아간다.

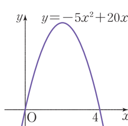
탐구 활동

어느 물 로켓이 지면에서 발사된 지점으로부터 수평 거리로 x m를 지날 때의 높이를 y m라고 하면 $y=-5x^2+20x$의 관계가 성립한다고 하자. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 물 로켓이 지면에 다시 떨어질 때 물 로켓의 높이는 몇 m인가?
2. 물 로켓이 발사된 지점에서 떨어진 지점까지의 수평 거리 x m를 구하려면 어떤 방정식을 풀어야 하는가?

이차함수 $y=-5x^2+20x$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 $y=-5x^2+20x$에 $y=0$을 대입하여 구할 수 있다.

따라서 교점의 x좌표는 이차방정식 $-5x^2+20x=0$, 즉 $-5x(x-4)=0$의 실근과 같으므로 0, 4이다.



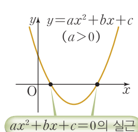
❶ 일반적으로 이차함수

$$y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$$

의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식

$$ax^2+bx+c=0$$

의 실근과 같다.



01 이차함수와 이차방정식의 관계

소단원 지도 목표

① 이차함수와 이차방정식의 관계를 이해하게 한다.

② 이차방정식의 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 말할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 y좌표는 0이라는 것에 착안하여 그 교점의 x좌표가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$의 근임을 이해하게 한다.

2. 이차방정식의 판별식이 0일 때, 방정식의 근은 중근으로 2개이지만 이차함수의 그래프와 x축의 교점의 개수는 한 개임을 주의하게 한다.

3. 이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$의 그래프가 x축과 만나지 않으면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$은 서로 다른 두 허근을 가짐을 정확하게 알게 한다.

생각 열기 참/고/자/료

중력장에서 지면과 비스듬히 일정한 속력으로 발사된 물 로켓은 포물선 운동을 한다. 포물선 운동을 하는 물 로켓의 자취는 이차함수의 그래프로 나타낼 수 있다.

물 로켓에 관한 더 자세한 내용은 한국물리학회 홈페이지(http://www.kps.or.kr)에서 찾아볼 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 이 탐구 활동은 자취가 이차함수로 나타나는 물 로켓이 발사된 지점에서 지면에 다시 떨어진 지점까지의 수평 거리를 구하여 봄으로써 이차함수와 이차방정식의 관계를 생각해 보기 위한 것이다.

1. 물 로켓이 다시 지면에 떨어질 때의 높이는 **0 m**이다.

2. 물 로켓이 발사된 지점에서 떨어진 지점까지의 수평 거리는 이차함수 $y=-5x^2+20x$에서 높이 y가 0일 때의 x의 값이므로 $y=-5x^2+20x$에 $y=0$을 대입한 이차방정식 $\boldsymbol{-5x^2+20x=0}$의 해를 구하면 된다.

참고| $y=-5x^2+20x$에서 x는 시간이 아니라 물 로켓이 발사된 지점으로부터의 수평 거리이다. 포물선 운동에서 수평 방향의 속력은 일정하므로 시간과 거리 x는 비례 관계에 있다.
따라서 위와 같이 높이 y는 x에 대한 이차함수로 나타난다.

본문 해설

❶ 좌표평면 위의 점 (x, y)에 대하여 x, y는 실수이므로 그래프의 교점을 이용하여 얻을 수 있는 근은 실근이다. 즉, 허근은 그래프의 교점과 관계없이 존재하므로 이차함수의 그래프와 x축이 만나지 않는 경우 이차방정식이 허근을 가진다.

교과서 84 쪽

❶ 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근의 개수와 같다. 그러므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라고 할 때, 이차함수의 그래프와 이차방정식의 해 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

이차함수의 그래프와 이차방정식의 해

판별식의 부호	$D>0$	$D=0$	$D<0$
이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계	서로 다른 두 점에서 만난다.	❷ 한 점에서 만난다(접한다).	만나지 않는다.
이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$의 그래프	α β x	$\alpha=\beta$ x	x
이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$의 그래프	α β x	$\alpha=\beta$ x	x
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 해	$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ (서로 다른 두 실근)	$x=\alpha$(중근)	서로 다른 두 허근

예제 01 다음 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 말하여라.

(1) $y=x^2-2x-3$　　(2) $y=x^2-2x+1$　　(3) $y=x^2+x+1$

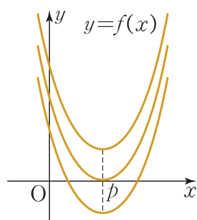
풀이 (1) 이차방정식 $x^2-2x-3=0$의 판별식 $D=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=16>0$이므로 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $x^2-2x+1=0$의 판별식 $D=(-2)^2-4\cdot1\cdot1=0$이므로 이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다(접한다).

(3) 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 판별식 $D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$이므로 이차함수 $y=x^2+x+1$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다(접한다).
(3) 만나지 않는다.

본문 해설



❶ 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계는 보통 판별식을 이용하여 조사하나, 다음과 같은 방법을 이용할 수도 있다. 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$의 그래프는 대칭축에 대하여 대칭이며 끊어진 곳이 없이 연결되어 있다. 이때 꼭짓점의 x좌표를 p라고 하면

$f(p)<0$: x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
$f(p)=0$: x축과 한 점에서 만난다.
$f(p)>0$: x축과 만나지 않는다.

즉, 이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$에서 꼭짓점의 x좌표는 $-\dfrac{b}{2a}$이므로 $x=-\dfrac{b}{2a}$를 대입하였을 때 y값의 부호로 x축과의 위치 관계를 알 수 있다.

예를 들면 이차함수 $y=x^2-2kx+4$가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 꼭짓점의 x좌표는 k이므로

$y=k^2-2k\cdot k+4<0$

$k^2-4>0$, $k<-2$ 또는 $k>2$

같은 방법으로 $a<0$일 때에도 꼭짓점의 y좌표의 부호에 따라 x축과의 위치 관계를 알 수 있다.

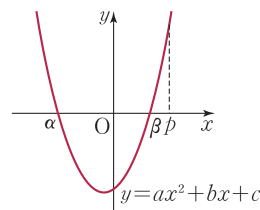
❷ 이차함수의 그래프(포물선)가 x축과 한 점에서 만날 때 이 그래프는 x축에 접한다고 하며, 그 한 점을 접점이라고 한다.

지/도/자/료 근의 위치

이차함수의 그래프를 이용하여 이차방정식의 근이 특정한 범위에 속할 조건을 구할 수 있다.

예를 들어 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$의 두 실근이 모두 p보다 작을 조건과 두 실근 사이에 p가 있을 조건은 다음과 같다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$의 두 실근을 α, $\beta(\alpha\le\beta)$라고 할 때



(i) 두 실근이 모두 p보다 작기 위해서는 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로 다음 세 부등식이 성립해야 한다.

$$D=b^2-4ac\ge0,\ x=-\frac{b}{2a}<p,\ f(p)>0$$

(ii) 두 실근 사이에 p가 있기 위해서는 $x=p$에서 $f(x)=ax^2+bx+c$의 함숫값이 음수이어야 하므로 $f(p)<0$이 성립해야 한다.

문제 1 다음 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 말하여라.

(1) $y=x^2+4x-1$ (2) $y=2x^2-4x+2$

(3) $y=-2x^2+2x-1$ (4) $y=-x^2-3x+1$

문제 2 이차함수 $y=x^2-x+k$의 그래프와 x축의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 그 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

예제 02 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축이 $x=1$에서 접할 때, 다음을 구하여라.

(1) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해

(2) 실수 a, b의 값

풀이 (1) 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축이 $x=1$에서 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 해는 $x=1$(중근)이다.

(2) 1을 중근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $(x-1)^2=0$, 즉 $x^2-2x+1=0$이므로 $x^2+ax+b=x^2-2x+1$에서 $a=-2$, $b=1$

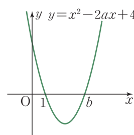
답 (1) $x=1$(중근) (2) $a=-2$, $b=1$

문제 3 이차함수 $y=x^2-2ax+b$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1, 0)$, $(2, 0)$에서 만날 때, 다음을 구하여라.

(1) 이차방정식 $x^2-2ax+b=0$의 해

(2) 실수 a, b의 값

발전 **문제 4** 이차함수 $y=x^2-2ax+4$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.



1

목표| 이차방정식의 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 알게 한다.

풀이| (1) $x^2+4x-1=0$에서 $\dfrac{D}{4}=2^2-1\cdot(-1)=5>0$

따라서 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $2x^2-4x+2=0$에서 $\dfrac{D}{4}=(-2)^2-2\cdot2=0$

따라서 한 점에서 만난다(접한다).

(3) $-2x^2+2x-1=0$에서

$\dfrac{D}{4}=1^2-(-2)\cdot(-1)=-1<0$

따라서 만나지 않는다.

(4) $-x^2-3x+1=0$에서

$D=(-3)^2-4\cdot(-1)\cdot1=13>0$

따라서 서로 다른 두 점에서 만난다.

2

목표| 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계를 이용하여 이차함수의 상수항의 값 또는 그 범위를 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2-x+k=0$에서 $D=1-4k$

(1) $D=1-4k>0$이어야 하므로 $\boldsymbol{k<\frac{1}{4}}$

(2) $D=1-4k=0$이어야 하므로 $\boldsymbol{k=\frac{1}{4}}$

(3) $D=1-4k<0$이어야 하므로 $\boldsymbol{k>\frac{1}{4}}$

3

목표| 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) 이차함수 $y=x^2-2ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표 -1, 2는 이차방정식 $x^2-2ax+b=0$의 실근이므로 이차방정식 $x^2-2ax+b=0$의 해는

$x=-1$ 또는 $x=2$

(2) 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=2a$, $-1\times2=b$이므로

$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{b=-2}$

4

목표| 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 이차함수 $y=x^2-2ax+4$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표 1, b는 이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 실근이다.

이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 해 $x=1$을 이 이차방정식에 대입하면 성립하므로

$1^2-2a\cdot1+4=0$, $a=\dfrac{5}{2}$

이차방정식 $x^2-2ax+4=0$에 $a=\dfrac{5}{2}$를 대입하면

$x^2-5x+4=0$

이 이차방정식을 풀면

$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)=0$

$x=1$ 또는 $x=4$

따라서 $\boldsymbol{a=\frac{5}{2}}$, $\boldsymbol{b=4}$이다.

02 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

소단원 지도 목표

① 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하게 한다.
② 이차방정식의 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 말할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 그래프를 그려봄으로써 이차함수의 그래프와 직선은 만나거나, 접하거나 또는 만나지 않음을 직관적으로 이해하게 한다.
2. 그래프만으로는 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 구체적으로 파악하기 어려운 경우가 있으므로 판별식을 이용하여 구하는 방법도 알게 한다.

교과서 86 쪽

02 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

● 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.

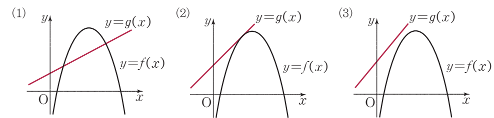
이차함수의 그래프와 직선은 어떤 위치 관계에 있는가?

생각 열기 레이저 광선

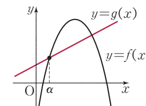
레이저 광선은 일반적인 빛에 비하여 퍼지지 않고 직선처럼 곧바로 진행하는 빛으로, 단위 넓이당 에너지가 커서 먼 거리 통신이나 의료 기기 등에서 이용되고 있다.
한편 포물선을 따라 움직이는 물체를 레이저 광선을 쏘아서 맞히려면 포물선을 나타내는 이차함수의 그래프와 레이저 광선을 나타내는 직선이 서로 만나야 한다.

탐구 활동 포물선 모양을 따라 움직이는 물체와 레이저 광선의 경로를 좌표평면 위에 나타내면 각각 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a<0)$와 함수 $g(x)=mx+n$의 그래프와 같다고 하자. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 두 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a<0)$와 $g(x)=mx+n$의 그래프가 다음과 같을 때, 물체와 레이저 광선이 만나는 횟수를 구하여 보자.



2. 다음 그림과 같이 물체와 레이저 광선이 만났을 때의 물체의 x좌표를 α라고 할 때, α는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근임을 설명하여 보자.



생각 열기 참/고/자/료

레이저는 먼 거리 통신, 의료 기기 이외에도 전투용 무기로도 사용되고 있다. 레이저를 전투용 무기로 사용할 경우 무음, 초고속성, 탄알의 제조와 휴대가 필요 없는 점 등의 장점이 있다.
이러한 이유로 선진국들은 앞다퉈 레이저 무기 개발에 힘쓰고 있다. 이미 미국에서는 경찰이 범죄 용의자에게 치명상을 입히지 않으면서 완벽하게 제압이 가능한 마이크로파와 레이저를 이용한 무기를 개발하여 실용화를 눈앞에 두고 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 두 함수의 그래프의 교점이 두 함수로 이루어진 연립방정식의 실근임을 이해하기 위한 것이다.

1. (1) **2회**
(2) **1회**
(3) 물체와 레이저는 **만나지 않는다.**

2. $x=\alpha$가 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근임을 보이려면 $f(\alpha)=g(\alpha)$임을 보이면 된다.
주어진 그림에서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점 중에서 x좌표가 α인 교점의 y좌표를 β라고 하자.
점 (α, β)는 두 함수의 교점이므로
$\beta=f(\alpha)$, $\beta=g(\alpha)$를 모두 만족시킨다.
따라서 $f(\alpha)=g(\alpha)$이므로 α는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근이다.

교과서 87 쪽

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계에 대하여 알아보자.

두 그래프의 교점과 방정식의 실근
두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근이다.

❶ 이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 $y=ax^2+bx+c$에 $y=mx+n$을 대입하여 얻은 이차방정식

$$ax^2+bx+c=mx+n,\ \text{즉}$$
$$ax^2+(b-m)x+c-n=0 \quad \cdots\cdots ①$$

의 실근과 같다.

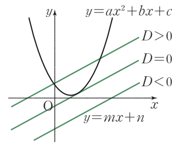
❷ 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 개수는 이차방정식 ①의 실근의 개수와 같다.

그러므로 이차방정식 ①의 판별식

$$D=(b-m)^2-4a(c-n)$$

의 부호에 따라 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계는 다음과 같음을 알 수 있다.

(i) $D>0$인 경우
방정식 ①은 서로 다른 두 실근을 가지므로 서로 다른 두 점에서 만난다.



(ii) $D=0$인 경우
방정식 ①은 중근(실근)을 가지므로 한 점에서 만난다(접한다).

(iii) $D<0$인 경우
방정식 ①은 실근을 가지지 않으므로 만나지 않는다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계
이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식을 D라고 할 때
(1) $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
또 서로 다른 두 점에서 만나면 $D>0$이다.
(2) $D=0$이면 한 점에서 만난다(접한다).
또 한 점에서 만나면(접하면) $D=0$이다.
(3) $D<0$이면 만나지 않는다.
또 만나지 않으면 $D<0$이다.

보기 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 $y=x^2$에 $y=x+1$을 대입하여 얻은 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 판별식이

$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)=5>0$$

이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.

본문 해설

❶ 이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는
(i) 서로 다른 두 점에서 만나는 경우
(ii) 한 점에서 만나는 경우(접하는 경우)
(iii) 만나지 않는 경우
의 세 가지가 있다.
이차함수와 직선의 방정식이 주어져 있을 때, 이차함수의 그래프와 직선을 그려 보지 않고도 방정식의 실근의 개수를 이용하여 위치 관계를 알 수 있다. 즉,
(두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수)=(방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수)
이므로 이차함수와 직선의 방정식에서 y를 소거한 이차방정식의 실근의 개수가 교점의 개수가 된다.

❷ 이차함수의 그래프와 직선을 그려 직관적으로 위치 관계를 알 수 있으나, 이차함수의 그래프가 대략적으로 그려지므로 정확히 구할 수 없는 경우가 종종 있다.
특히 직선이 이차함수의 그래프에 접하는 경우에는 그래프로는 판단하기가 더욱 어렵다.
따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 정확한 개수는 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식 D를 이용하여 구한다.

지/도/자/료

1. 다음 세 가지 경우에서 $f(x)-g(x)=0$의 실근이 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표이다.

(i) 이차함수의 그래프와 x축과의 교점
$f(x)=ax^2+bx+c,\ g(x)=0\ (a\neq0)$

(ii) 이차함수의 그래프와 직선과의 교점
$f(x)=ax^2+bx+c,\ g(x)=mx+n\ (a\neq0,\ m\neq0)$

(iii) 두 이차함수의 그래프의 교점
$f(x)=ax^2+bx+c,\ g(x)=a'x^2+b'x+c'$
$(a\neq0,\ b\neq0)$

2. 이차함수의 그래프와 직선 $x=n$의 위치 관계
일반적으로 이차함수의 그래프와 y축에 평행하지 않은 직선이 한 점에서 만나면 접하지만 이차함수의 그래프와 y축에 평행한 직선은 항상 한 점에서 만나며 그 경우 접하지 않는다. 즉,

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c & \cdots\cdots ① \\ x=n & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

을 연립하면 y의 값은 항상 $y=an^2+bn+c$로 일정하다. 따라서 교점은 $(n,\ an^2+bn+c)$로 유일하고, 이것은 판별식 $D=0$인 것과는 관계가 없으므로 접하는 경우가 아니다.

1

목표 | 판별식을 이용하여 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $-x^2+6x-4=2x$

즉, $x^2-4x+4=0$에서

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot4=0$

따라서 교점의 개수는 **1**개이다.

(2) $x^2+3x+1=2x$, 즉 $x^2+x+1=0$에서

$D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

따라서 교점의 개수는 **0**개이다.

2

목표 | 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 만족시키는 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이 | $y=-x^2+x+1$에 $y=2x+a$를 대입하여 정리하면

$2x+a=-x^2+x+1$,

$x^2+x+a-1=0$ ······ ①

이차방정식 ①의 판별식을 D라고 하면

$D=1^2-4(a-1)=-4a+5$

(1) $D>0$이어야 하므로 $-4a+5>0$에서 $\boldsymbol{a<\frac{5}{4}}$

(2) $D=0$이어야 하므로 $-4a+5=0$에서 $\boldsymbol{a=\frac{5}{4}}$

(3) $D<0$이어야 하므로 $-4a+5<0$에서 $\boldsymbol{a>\frac{5}{4}}$

3

목표 | 이차함수의 그래프와 직선이 접하는 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이 | 접하는 직선의 방정식을 $y=2x+a$로 놓으면

$x^2-2x+1=2x+a$, $x^2-4x+1-a=0$

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(1-a)=0$에서 $a=-3$

$\boldsymbol{y=2x-3}$

교과서 88 쪽

문제 1 다음 이차함수의 그래프와 직선 $y=2x$의 교점의 개수를 구하여라.

(1) $y=-x^2+6x-4$ (2) $y=x^2+3x+1$

예제 01 이차함수 $y=x^2-x$의 그래프와 직선 $y=x+a$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 a의 값 또는 그 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

풀이 $y=x^2-x$에 $y=x+a$를 대입하여 정리하면

$x^2-2x-a=0$ ······ ①

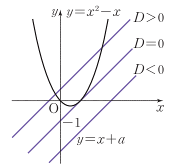
이차방정식 ①의 판별식을 D라고 하면

$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-a)=4+4a$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D=4+4a>0$이어야 하므로 $a>-1$

(2) 한 점에서 만나려면 $D=4+4a=0$이어야 하므로 $a=-1$

(3) 만나지 않으려면 $D=4+4a<0$이어야 하므로 $a<-1$



답 (1) $a>-1$ (2) $a=-1$ (3) $a<-1$

문제 2 이차함수 $y=-x^2+x+1$의 그래프와 직선 $y=2x+a$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 a의 값 또는 그 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

발전 **문제 3** 직선 $y=2x+1$과 평행하고 이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프와 접하는 직선의 방정식을 구하여라.

지/도/자/료

다음과 같이 미지의 상수를 포함하는 경우의 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계는 판별식을 이용하여 미지의 상수의 값 또는 범위를 정하고 그래프를 그려서 위치 관계를 이해할 수 있도록 지도한다.

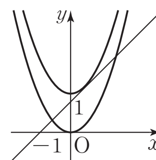
① $y=x^2+kx+k$, $y=x+1$ (포물선이 움직인다.)

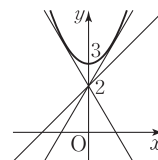
② $y=4x^2+3$, $y=kx+2$

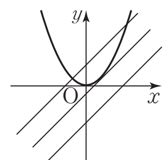
(직선은 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 변한다.)

③ $y=2x^2$, $y=4x+k$

(직선의 기울기는 4이고, y절편이 변한다.)







교과서 89 쪽

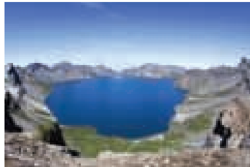
03 이차함수의 최대, 최소

● 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

이차함수의 최댓값과 최솟값을 어떻게 구하는가?

생각 열기 백두산과 화산 폭발

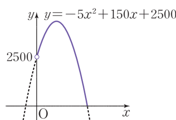
백두산은 한반도에서 가장 높은 산으로 높이는 2750 m이다. 백두산의 천지를 만든 대규모 화산 폭발은 지금으로부터 약 1000년 전인 고려 시대 초기에 일어난 것으로 알려져 있다.



탐구 활동 지면으로부터 높이가 2500 m인 지점에서 어느 화산이 폭발하여 초속 150 m의 속력으로 용암을 분출하였을 때, 분출물의 x초 후의 높이를 y m라고 하면

$$y=-5x^2+150x+2500\ (x>0)$$

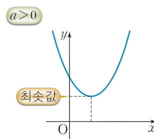
의 관계가 성립한다고 하자. 다음 물음에 답하여 보자.

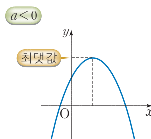


1. 이차함수 $y=-5x^2+150x+2500$을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내어 보자.
2. 분출물이 최대로 높이 올라갔을 때의 높이와 그 높이까지 올라가는 데 걸린 시간을 구하여 보자.

❶ x값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$의 최댓값, 최솟값을 구하려면 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 변형하여 꼭짓점을 구한다.

x값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$는
$a>0$인 경우 꼭짓점에서 최솟값을 가지고, 최댓값은 없다.
$a<0$인 경우 꼭짓점에서 최댓값을 가지고, 최솟값은 없다.





03 이차함수의 최대, 최소

소단원 지도 목표

① x값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있게 한다.
② x값의 범위가 제한되어 있을 때, 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.
③ 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 실생활 문제를 풀 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 이차함수에서 x값의 범위가 실수 전체일 때에는 최댓값, 최솟값 중 어느 하나를 반드시 갖게 되고, x값의 범위가 제한되어 있을 때는 최댓값과 최솟값을 모두 가질 수도 있다는 것을 그래프를 이용하여 직관적으로 이해하도록 지도한다.

생각 열기 참/고/자/료

약 1000년 전 백두산의 대규모 폭발이 일어났는데 그 당시 화산재가 홋카이도 등 일본 동북부 지역에 무려 5 cm정도의 두께만큼 쌓일 정도였다고 한다.
미국의 한 연구소에 따르면 백두산은 지난 4000년간 10번에 걸쳐 폭발하였으며, 중국 과학자들은 백두산 주변에 대한 장기간의 추적 연구 끝에 백두산 천지 아래에 있는 마그마 3개의 층을 확인하였다고 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 화산 분출물의 시간에 따른 높이가 이차함수인 포물선으로 나타남을 이용하여 분출물의 최대 높이와 그때의 시각을 구하기 위한 것이다.

1. 주어진 이차함수를 완전제곱꼴로 변형하면

$$\begin{aligned}y&=-5x^2+150x+2500\\&=-5(x^2-30x+225)+3625\\&=\mathbf{-5(x-15)^2+3625}\end{aligned}$$

2. 분출물이 최대로 높이 올라갔을 때의 높이는 **3625 m**이며 그 높이까지 올라가는 데 걸린 시간은 **15초**이다.

본문 해설

❶ 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 꼭짓점이 원점인 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이므로 꼭짓점의 좌표가 $(p,\ q)$인 포물선이다.
또 그래프의 모양은 $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록하다.

본문 해설

❶ x값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$에 대하여

(i) $a>0$인 경우: 그래프가 아래로 볼록한 포물선으로 $x=p$일 때 y의 값은 최소이고 최솟값은 q이다.

(ii) $a<0$인 경우: 그래프가 위로 볼록한 포물선으로 $x=p$일 때 y의 값은 최대이고 최댓값은 q이다.

x값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수의 식이 주어지면 그래프를 그리지 않아도 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있다.

1

목표 | x값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이 (1) $y=-x^2-4x+1$

$=-(x^2+4x+4)+5$

$=-(x+2)^2+5$

따라서 이 함수의 **최댓값은 5이고, 최솟값은 없다.**

(2) $y=2x^2-6x+4$

$=2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-\frac{1}{2}$

$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

따라서 이 함수의 **최솟값은 $-\frac{1}{2}$이고, 최댓값은 없다.**

본문 해설

❷ x값의 범위가 제한되어 있는 경우, 이차함수의 최댓값과 최솟값은 반드시 그래프를 그려서 구한다.

그래프를 그릴 때, 꼭짓점의 x좌표가 x값의 범위에 포함되는 경우와 포함되지 않는 경우를 구분하여 생각한다. 또 제한된 범위가 끝 값을 포함하는 경우와 포함하지 않는 경우를 주의하여 살펴보며 그래프를 그린다.

교과서 90 쪽

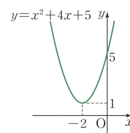
❶ **예제 01** 이차함수 $y=x^2+4x+5$의 최댓값 또는 최솟값을 구하여라.

풀이 $y=x^2+4x+5=(x^2+4x+4)+1=(x+2)^2+1$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이 함수의 최솟값은 $x=-2$일 때 1이고, 최댓값은 없다.

답 최솟값은 1이고, 최댓값은 없다.



문제 1 다음 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하여라.

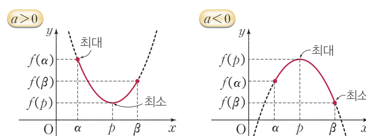
(1) $y=-x^2-4x+1$ (2) $y=2x^2-6x+4$

이제 x값의 범위가 제한되어 있을 때, 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여 보자.

❷ x값의 범위가 $\alpha\le x\le\beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q\ (a\neq0)$에서

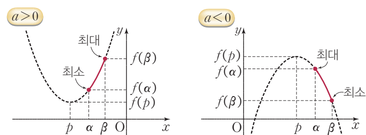
(i) 꼭짓점의 x좌표 $x=p$가 x값의 범위에 포함될 경우

$f(\alpha), f(\beta), f(p)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.



(ii) 꼭짓점의 x좌표 $x=p$가 x값의 범위에 포함되지 않을 경우

$f(\alpha), f(\beta)$ 중에서 큰 값이 최댓값이고, 작은 값이 최솟값이다.



읽/기/자/료 사이클로이드와 현수교

원 위에 한 점을 찍고, 그 원을 한 직선 위에서 굴렸을 때, 점이 그리며 나아가는 곡선을 사이클로이드라고 한다.

사이클로이드

한편 줄의 양 끝을 같은 높이에 고정시켰을 때, 그 줄이 처진 모양을 현수선이라고 하는데 이 현수선에 일정한 무게를 가하면 포물선이 된다. 이때 나타나는 포물선은 사이클로이드를 뒤집어 놓은 것과 거의 비슷한 모양이 된다. 이러한 현수선을 이용한 다리를 현수교라고 한다.

교과서 91 쪽

예제 02 $-1 \le x \le 2$일 때, 이차함수 $y=x^2-2x-1$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

꼭짓점의 x좌표가 $x=1$이므로 x값의 범위 $-1 \le x \le 2$에 포함된다.

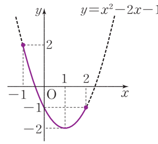
풀이 $y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$에서 꼭짓점의 x좌표는 $x=1$이고, x값의 범위는 $-1 \le x \le 2$이므로

$x=-1$일 때 $y=2$

$x=1$일 때 $y=-2$

$x=2$일 때 $y=-1$

따라서 최댓값은 2이고, 최솟값은 -2이다.



답 최댓값은 2이고, 최솟값은 -2이다.

문제 2 주어진 범위에서 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=2x^2-4x+1$ $(0 \le x \le 2)$　　(2) $y=-x^2-6x+3$ $(1 \le x \le 4)$

이차함수의 최댓값과 최솟값을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

예제 03 어느 항공사의 현재 서울–제주 간 노선의 항공료는 6만 원이고 이 노선을 하루 평균 300명의 승객이 이용한다고 한다. 항공료의 가격을 x만 원 올리면 하루 평균 $30x$명의 승객이 감소한다고 할 때, 이 노선의 하루 매출액이 최대가 되도록 하는 항공료를 구하여라. (단, $0 \le x \le 10$)

풀이 (항공료)$=6+x$(만 원)

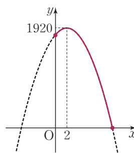
(하루 평균 승객 수)$=300-30x$(명)

이므로 하루 매출액을 y만 원이라고 하면

$y=(6+x)(300-30x)$

$=-30(x-2)^2+1920$ $(0 \le x \le 10)$

따라서 하루 매출액의 최댓값은 $x=2$일 때 1920만 원이고, 이때 항공료는 8만 원이다.



답 8만 원

2

목표 x값의 범위가 제한되어 있을 때, 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이 (1) $y=2x^2-4x+1=2(x-1)^2-1$

에서 꼭짓점의 x좌표는 $x=1$이고, x값의 범위는 $0 \le x \le 2$이므로

$x=0$ 또는 $x=2$일 때 $y=1$

$x=1$일 때 $y=-1$

따라서 **최댓값은 1이고, 최솟값은 -1이다.**

(2) $y=-x^2-6x+3=-(x+3)^2+12$

에서 꼭짓점의 x좌표는 $x=-3$이고, x값의 범위는 $1 \le x \le 4$이므로

$x=1$일 때 $y=-4$

$x=4$일 때 $y=-37$

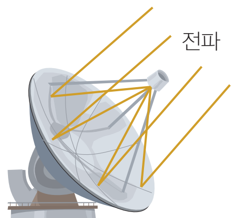
따라서 **최댓값은 -4이고, 최솟값은 -37이다.**

읽/기/자/료 이차함수의 활용의 예

1. 많은 사람들이 수학은 물리학이나 공학에만 주로 쓰이는 것으로 알고 있지만 실은 경영학이나 경제학, 사회학 등 사회과학에서도 유용하게 쓰인다.

경제 활동을 할 때에는 최소의 비용으로 최대의 이윤을 얻어야 하므로 제한된 자원으로 가장 효율적인 방법을 선택해야 한다. 이익을 최대로 하기 위한 생산 계획의 관리, 운송 비용을 최소로 하는 물건 배송 방법 등은 실생활에서 중요한 문제이다. 이러한 문제를 해결하는 데 이차함수의 최대, 최소 구하는 방법을 이용할 수 있다.

2. 위성 방송을 시청하는 데 사용하는 접시형 안테나(파라볼라 안테나)의 면은 포물선을 그 축을 중심으로 회전시켜 만든 모양인 포물면으로 되어 있다. 인공위성에서 발사된 전파는 평행하게 진행하여 접시형 안테나에서 반사된 후 한 점을 지나게 된다. 따라서 이 점의 위치에 수신기를 설치하면 미약한 전파도 잘 탐지할 수 있게 된다.



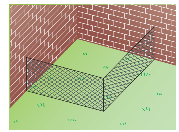
이와 같은 원리는 먼 곳에 있는 목적물을 비추기 위한 탐조등(서치라이트)과 자동차의 전조등(헤드라이트)에도 이용된다. 탐조등과 전조등의 반사경은 포물면 모양으로 전구를 특정 위치에 놓으면 빛이 축과 평행인 방향으로 반사되어 먼 곳까지 비춘다.

그리고 콘서트에서 가수에게 집중되는 스포트라이트와 주변에서 흔히 볼 수 있는 손전등에도 포물선의 성질을 이용한 반사경이 들어 있다.

또한 프랑스의 오델로 태양열 발전소도 계단식 언덕에 평평한 유리를 경사지게 설치하여 반사경에 반사된 태양빛을 특정 위치에 있는 태양로로 보내어 3000 ℃가 넘는 열을 발생시킨다.

교과서 92 쪽

문제 3 오른쪽 그림과 같이 직각을 이루는 두 벽면에 길이가 10 m인 철망을 이용하여 직사각형 모양의 가축우리를 만들려고 한다. 가축우리의 넓이가 최대가 되도록 하는 가로와 세로의 길이를 구하여라. (단, 철망의 두께는 생각하지 않는다.)



문제 4 어떤 농작물 x톤을 팔면 1톤당 $\left(100-\frac{x}{10}\right)$만 원의 이익이 생기고, x톤을 운송하는 데 드는 비용은 $(50+10x)$만 원이라고 한다. 이익금에서 운송비를 뺀 순이익금이 최대가 되도록 하려면 몇 톤을 팔아야 하는지 구하여라. (단, $0<x<1000$)

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

두 양수 a, b의 합이 일정할 때, 두 수의 곱 ab가 최대가 되려면 a와 b 사이에는 어떤 관계가 성립해야 하는지 설명하여 보자.

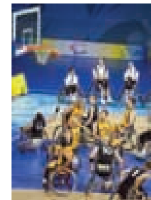
단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

지면에서 수직 방향으로 a m/s의 속력으로 던진 농구공의 x초 후의 높이를 y m라고 하면

$$y=ax-bx^2\ (a>0,\ b>0)$$

의 관계가 성립한다고 하자. 농구공을 던지는 속력이 2배가 되면 농구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 몇 배가 되는지 구하여라.



3

목표| 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 가축우리의 가로의 길이를 x m라고 하면 세로의 길이는 $(10-x)$ m이고, 각각의 길이는 양수이므로 $0<x<10$

이때 가축우리의 넓이를 y m^{2}라고 하면

$y=x(10-x)=-x^2+10x$

$=-(x-5)^2+25$ (단, $0<x<10$)

따라서 $x=5$일 때 최댓값을 가지므로 가축우리의 가로와 세로의 길이는 모두 **5 m**이다.

4

목표| 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 1톤당 $\left(100-\frac{x}{10}\right)$만 원의 이익이 생기므로 x톤을 팔았을 때의 이익은

$x\left(100-\frac{x}{10}\right)$만 원 ⋯⋯ ①

x톤을 운송하는 데 드는 비용은

$(50+10x)$만 원 ⋯⋯ ②

순이익금을 y만 원이라고 하면 ①, ②에서

$y=x\left(100-\frac{x}{10}\right)-(50+10x)$

$=-\frac{1}{10}(x-450)^2+\frac{450^2}{10}-50$

따라서 $x=450$일 때 순이익금이 최댓값을 가지므로 **450톤**을 팔아야 한다.

사고력 기르기 추론

출제 의도| 주어진 조건으로부터 이차함수의 식을 세우고, 이차함수의 최대, 최소를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 문제이다.

풀이| $a+b=k$(k는 일정)로 놓으면 a, b는 양수이므로 k도 양수이다.

$b=k-a$이므로 $b=k-a>0$, $0<a<k$

$ab=a(k-a)=-a^2+ka=-\left(a-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k^2}{4}$

$0<\frac{k}{2}<k$이므로 꼭짓점의 a좌표가 a값의 범위에 포함된다. 따라서 $\boldsymbol{a=b=\frac{k}{2}}$일 때 ab가 최대가 된다.

단원 과제

목표| 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $y=ax-bx^2$

$=-b\left(x^2-\frac{a}{b}x\right)$

$=-b\left(x-\frac{a}{2b}\right)^2+\frac{a^2}{4b}$ $(x>0)$

농구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 $\frac{a^2}{4b}$ m이므로 농구공을 던지는 속력 a의 값이 2배가 되면 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 **4배**가 된다.

주의| x값의 범위가 직접 제시되어 있지 않더라도 문제에 주어진 상황에 맞는 x값의 범위를 찾아야 한다.

교과서 93쪽

중단원 기초

[해답 p.221]

수준별 학습

1 다음 이차함수의 그래프가 x축과 만나는지 알아보고, 만나는 경우에는 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하여라.

(1) $y=(x+1)(x-2)$ (2) $y=-x^2-2x+8$

(3) $y=2x^2+4x+2$ (4) $y=-3x^2+2x-1$

01 이차함수와 이차방정식의 관계

2 이차함수 $y=x^2+ax+1$의 그래프가 x축과 접하도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하여라.

01 이차함수와 이차방정식의 관계

3 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 그 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

02 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

4 다음 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구하여라.

(1) $y=2x^2-4x+3$ (2) $y=-x^2+3x-2$

03 이차함수의 최대, 최소

5 $-1\le x\le 2$일 때, 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=2(x-1)^2+3$ (2) $y=-(x-3)^2+2$

03 이차함수의 최대, 최소

중/단/원 기초

1

목표| 이차방정식을 이용하여 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) x축과 두 점에서 **만나고**, 이때의 x좌표는 $\mathbf{-1,\ 2}$이다.

(2) x축과 두 점에서 **만나고**, 이때의 x좌표는 $\mathbf{-4,\ 2}$이다.

(3) x축과 한 점에서 **만나고(접하고)**, 이때의 x좌표는 $\mathbf{-1}$이다.

(4) x축과 **만나지 않는다.**

2

목표| 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 이차방정식 $x^2+ax+1=0$이 중근을 가져야 하므로

$D=a^2-4=(a+2)(a-2)=0$

따라서 $\boldsymbol{a=-2}$ **또는** $\boldsymbol{a=2}$이다.

3

목표| 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 만족시키는 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=x^2-3x+2$에 $y=x+k$를 대입하여 정리하면 $x^2-4x+2-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(2-k)=2+k$

(1) $\frac{D}{4}=2+k>0$이어야 하므로 $\boldsymbol{k>-2}$

(2) $\frac{D}{4}=2+k=0$이어야 하므로 $\boldsymbol{k=-2}$

(3) $\frac{D}{4}=2+k<0$이어야 하므로 $\boldsymbol{k<-2}$

4

목표| x값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1$

따라서 이 함수의 **최솟값은 1**이고, **최댓값은 없다.**

(2) $y=-x^2+3x-2=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

따라서 이 함수의 **최댓값은** $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$이고, **최솟값은 없다.**

5

목표| x값의 범위가 제한되어 있을 때, 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=2(x-1)^2+3$에서 꼭짓점의 x좌표는 $x=1$

$x=-1$일 때 $y=11$

$x=1$일 때 $y=3$

$x=2$일 때 $y=5$

따라서 **최댓값은 11**이고, **최솟값은 3**이다.

(2) $y=-(x-3)^2+2$에서 꼭짓점의 x좌표는 $x=3$

$x=-1$일 때 $y=-14$

$x=2$일 때 $y=1$

따라서 **최댓값은 1**이고, **최솟값은 −14**이다.

중/단/원 기본

교과서 94 쪽

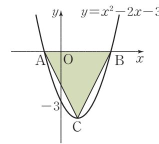
중단원 기본

[해답 p.221]

수준별 학습

1 이차함수 $y=x^2+x+k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 A, B라고 하자. 선분 AB의 길이가 $\sqrt{5}$일 때, 실수 k의 값을 구하여라. (01 이차함수와 이차방정식의 관계)

2 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 A, B라 하고, 꼭짓점을 C라고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라. (01 이차함수와 이차방정식의 관계)



3 직선 $y=x+m$이 이차함수 $y=x^2-x+1$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, $y=x^2+x+1$의 그래프와는 만나지 않을 때, 실수 m값의 범위를 구하여라. (02 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계)

4 이차함수 $y=x^2-4x+a$의 최솟값이 3일 때, 실수 a의 값을 구하여라. (03 이차함수의 최대, 최소)

5 이차함수 $y=-x^2+4x+a$ $(1\le x\le 4)$의 최댓값이 2일 때, 다음을 구하여라. (03 이차함수의 최대, 최소)

(1) 실수 a의 값 (2) 최솟값

1

목표| 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 이차방정식 $x^2+x+k=0$의 두 근을 α, β로 놓으면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=k$

선분 AB의 길이가 $\sqrt{5}$이므로

$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$, 즉 $|\alpha-\beta|^2=5$

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=1-4k=5$

따라서 $k=\mathbf{-1}$이다.

2

목표| 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

이므로 A$(-1,\ 0)$, B$(3,\ 0)$

$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$이므로 꼭짓점은 C$(1,\ -4)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=\mathbf{8}$

3

목표| 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 만족시키는 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이| 직선 $y=x+m$이 이차함수 $y=x^2-x+1$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나므로

$x+m=x^2-x+1$에서 $x^2-2x-m+1=0$

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-m+1)=m>0$

$m>0$ ······ ①

직선 $y=x+m$이 이차함수 $y=x^2+x+1$의 그래프와 만나지 않으므로

$x+m=x^2+x+1$에서 $x^2-m+1=0$

$\frac{D}{4}=0^2-(-m+1)=m-1<0$

$m<1$ ······ ②

①, ②에서 $\mathbf{0<m<1}$

4

목표| x값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 이차함수 $y=x^2-4x+a$의 최솟값이 3이므로

$y=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$에서 $a-4=3$

따라서 $a=\mathbf{7}$이다.

5

목표| x값의 범위가 제한되어 있을 때, 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=-x^2+4x+a=-(x-2)^2+a+4$

(1) 최댓값은 $x=2$일 때 $a+4$이므로

$a+4=2$, $a=\mathbf{-2}$

(2) $x=1$일 때 $y=1$

$x=4$일 때 $y=-2$

따라서 최솟값은 $\mathbf{-2}$이다.

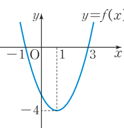
교과서 95 쪽

중단원 실력

[해답 p.221]

수준별 학습

1 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $f(x+1)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

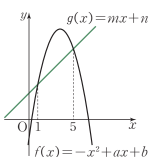


01 이차함수와 이차방정식의 관계

2 점 A는 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위에 있고, 점 B는 직선 $y=2x-2$ 위에 있다. 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 길이가 최소일 때, 점 A의 좌표를 구하여라.

02 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

3 두 함수 $f(x)=-x^2+ax+b$, $g(x)=mx+n$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $f(x)-g(x)$의 최댓값을 구하여라.

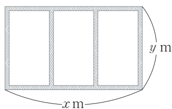


03 이차함수의 최대, 최소

4 $x\geq0$, $y\geq0$이고 $x+y=3$일 때, $2x^2+y^2$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

03 이차함수의 최대, 최소

5 길이가 40 m인 조립식 벽면을 모두 이용하여 오른쪽 그림과 같이 세 개의 직사각형 모양의 방으로 이루어진 건물을 만들려고 한다. 전체 건물의 밑면의 넓이가 최대일 때, x의 값을 구하여라. (단, 벽면의 두께는 생각하지 않는다.)



03 이차함수의 최대, 최소

중/단/원 실력

1

목표| 이차함수의 그래프와 이차방정식의 위치 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 그래프에서 방정식 $f(x)=0$의 해는

$x=-1$ 또는 $x=3$

이므로 $f(x+1)=0$에서 $x+1=-1$ 또는 $x+1=3$

즉, $x=-2$, $x=2$이므로 두 근의 합은 **0**이다.

2

목표| 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 직선 $y=2x-2$가 평행이동하여 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 최초로 만날 때의 접점이 선분 AB의 길이를 최소가 되도록 하는 점 A이다.

기울기가 2이고 이차함수 $y=x^2$에 접하는 직선의 방정식을 $y=2x+a$로 놓고 $y=x^2$에 대입하여 정리하면

$x^2-2x-a=0$

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(-a)=1+a=0$, $a=-1$

$y=x^2$과 $y=2x-1$의 그래프의 접점의 x좌표를 구하면 $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$, $x=1$

따라서 선분 AB의 길이를 최소가 되도록 하는 점 A의 좌표는 **A(1, 1)**이다.

3

목표| 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계, 이차함수의 최대, 최소를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 그래프에서 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 해가 1, 5이다. 또한 $y=f(x)$는 이차항의 계수가 -1인 이차함수이고 $y=g(x)$는 일차함수이므로 $y=f(x)-g(x)$는 이차항의 계수가 -1인 이차함수이다. 즉,

$f(x)-g(x)=-(x-1)(x-5)$

$=-(x-3)^2+4$

따라서 $f(x)-g(x)$의 최댓값은 **4**이다.

4

목표| x값의 범위가 제한되어 있을 때, 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $x+y=3$에서 $y=3-x$

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$

$x\geq0$, $y\geq0$에서 $x\geq0$, $3-x\geq0$이므로 $0\leq x\leq3$

따라서 **최댓값은** $x=3$일 때 **18**이고, **최솟값은** $x=1$일 때 **6**이다.

5

목표| 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $2x+4y=40$이므로 $y=10-\frac{1}{2}x$

전체 건물의 밑면의 넓이는

$xy=x\left(10-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}x^2+10x=-\frac{1}{2}(x-10)^2+50$

$x>0$, $y>0$이므로 $x>0$, $10-\frac{1}{2}x>0$에서 $0<x<20$

따라서 $\boldsymbol{x=10}$일 때 전체 건물의 밑면의 넓이가 최대가 된다.

3 여러 가지 방정식

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있게 한다.

② 미지수가 3개인 연립일차방정식과 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 삼차방정식과 사차방정식	삼차방정식과 사차방정식
02 연립방정식	미지수가 3개인 연립일차방정식
	미지수가 2개인 연립이차방정식
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 96 쪽

3 여러 가지 방정식

균형 잡힌 식단 계획하기

청소년기에는 체내에서 새로운 조직이 많이 만들어지고 여러 가지 조절 작용이 활발하게 일어나므로 일생 중에서 가장 많은 영양 섭취가 필요하다.

영양섭취기준이란 성장 시기에 맞게 하루에 먹도록 권장하는 영양소의 양으로, 오른쪽 표는 15～18세의 영양섭취기준의 일부를 나타낸 것이다. 장기적으로 영양섭취기준보다 많이 먹으면 영양 과잉으로 인한 질병이 생길 수 있으며 지속적으로 영양섭취기준 이하로 먹으면 영양 부족으로 인해 청소년기의 성장이 늦춰질 수 있다.

15～18세의 1일 영양섭취기준

	남	여
에너지(kcal)	2700	2000
단백질(g)	55	45
수분(mL)	2600	2100
비타민 A(μg RE)	850	600
비타민 D(μg)	5	5
비타민 E(mg α-TE)	12	10
비타민 C(mg)	110	100
칼슘(mg)	900	800
인(mg)	1000	800
나트륨(g)	1.5	1.5
철(mg)	15	17
아연(mg)	10	9

(에너지는 필요추정량, 수분, 비타민 D, 비타민 E, 나트륨은 충분섭취량, 나머지는 권장섭취량이다.)

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 106 쪽

여러 가지 음식을 먹을 때, 적당한 열량을 얻으려면 어떻게 먹는 것이 좋을까?

들어가면서

실생활의 다양한 문제를 여러 가지 방정식으로 해결할 수 있다.

이 단원에서는 지금까지 다루어 왔던 일차방정식, 이차방정식에서 나아가 삼차방정식과 사차방정식, 미지수가 3개인 연립일차방정식과 미지수가 2개인 연립이차방정식을 푸는 방법을 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.	상	인수정리, 조립제법을 이용하여 삼차방정식과 사차방정식을 풀고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	인수정리, 조립제법을 이용하여 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.
	하	인수분해 공식을 이용할 수 있는 간단한 삼차방정식을 풀 수 있다.
2. 미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀 수 있다.	상	미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀 수 있다.
	하	미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀기 위하여 미지수 가운데 어느 하나를 소거할 수 있다.
3. 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.	상	미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	두 이차방정식으로 된 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.
	하	일차방정식과 이차방정식으로 된 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.

교과서 97 쪽

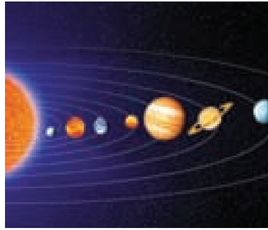
01 삼차방정식과 사차방정식

● 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.

삼차방정식과 사차방정식을 어떻게 푸는가?

생각 열기 케플러 제3법칙

케플러 제3법칙은 행성의 공전 주기의 제곱은 태양으로부터 그 행성까지 거리의 세제곱에 비례한다는 법칙이다. 이 법칙으로부터 태양과 행성 사이의 거리를 측정할 수 있게 되었다. 그런데 태양과 행성은 매우 멀리 떨어져 있기 때문에 먼 거리를 나타내는 단위가 필요하다. 태양계 내의 천체의 거리를 나타낼 때에는 주로 천문단위(AU)를 사용하는데 1 AU는 태양과 지구 사이의 거리이다.



탐구 활동 행성의 공전 주기를 T년, 태양과 그 행성 사이의 거리를 R AU라고 하면 케플러 제3법칙에 의하여

$$T^2=aR^3$$

이 성립한다. 다음 물음에 답하여 보자. (단, a는 비례상수이다.)

1. 지구의 공전 주기는 1년이고, 태양과 지구 사이의 거리는 1 AU이다. 이때 a의 값을 구하여 보자.
2. 공전 주기가 64년인 행성이 있다고 하자. 태양과 그 행성 사이의 거리를 x AU라고 할 때, x에 대한 방정식을 만들어 보자.
3. 2에서 만든 방정식을 (x에 대한 다항식)$=0$의 꼴로 나타내고, 이때 좌변은 x에 대한 몇 차식인지 말하여 보자.

● $f(x)$가 x에 대한 삼차식, 사차식일 때, 방정식 $f(x)=0$을 각각 x에 대한 삼차방정식, 사차방정식이라고 한다.

모든 이차방정식은 근의 공식을 이용하여 쉽게 풀 수 있지만, 삼차방정식이나 사차방정식을 푸는 것은 일반적으로 간단하지 않다.

❶ 여기에서는 삼차방정식이나 사차방정식 중에서 인수분해 공식이나 인수정리를 이용하여 풀 수 있는 것만 다루기로 한다.

01 삼차방정식과 사차방정식

소단원 지도 목표

① 인수분해 공식을 이용하여 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있게 한다.

② 인수정리와 조립제법을 이용하여 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있게 한다.

③ 삼차방정식이나 사차방정식의 한 근이 주어졌을 때, 다른 근을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 실계수인 삼차, 사차방정식은 주로 계수가 정수이고, 유리수 범위에서 인수분해가 되는 경우만 다룬다.
2. 인수분해 방법은 다항식에서 학습한 나머지정리, 인수정리, 조립제법을 이용하는 것이 일반적이지만, 방정식의 형태에 따라 치환 등과 같은 방법으로도 풀 수 있음을 지도한다.
3. 계수가 실수인 삼차방정식과 사차방정식의 한 근이 허근이면 반드시 그 켤레복소수도 그 방정식의 근임을 알게 한다.

생각 열기 참/고/자/료

케플러 법칙은 독일의 천문학자 케플러(Kepler, J. ; 1571~1630)가 발표한 행성의 운동에 관한 세 가지 법칙으로, 제1법칙은 행성이 태양을 한 초점으로 하는 타원 궤도로 공전한다는 것이고, 제2법칙은 행성과 태양을 연결하는 선분이 같은 시간 동안 쓸고 지나가는 넓이가 일정하다는 것이다. 마지막 제3법칙은 행성의 공전 주기의 제곱은 공전 궤도의 긴 반지름의 세제곱에 비례하다는 것이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 케플러 제3법칙을 이용하여 문제를 해결하는 과정에서 삼차방정식이 나타남을 확인함으로써 삼차방정식을 푸는 방법에 관심을 불러일으키려는 것이다.

1. $T^2=aR^3$에 $T=1$, $R=1$을 대입하면
   $1^2=a\times1^3$
   따라서 $a=\mathbf{1}$이다.
2. 1에서 $a=1$이고 $T^2=aR^3$에 $T=64$, $R=x$를 대입하면
   $64^2=x^3$, $\mathbf{4096=x^3}$
3. $4096=x^3$을 (x에 대한 다항식)$=0$의 꼴로 나타내면
   $\mathbf{x^3-4096=0}$
   $x^3-4096=0$에서 좌변은 x에 대한 **삼차식**이다.

본문 해설

❶ 삼차방정식과 사차방정식을 인수분해를 이용하여 풀 때 인수정리와 조립제법을 이용하는 경우가 일반적이며, 방정식의 형태에 따라 치환 등의 방법을 사용하는 것이 편리하다.

1

목표| 인수분해 공식을 이용하여 간단한 삼차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) 좌변을 인수분해하면

$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

따라서 구하는 근은

$\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{3}i}$이다.

(2) 좌변을 인수분해하면

$(x-4)(x^2+4x+16)=0$

따라서 구하는 근은

$\boldsymbol{x=4}$ **또는** $\boldsymbol{x=-2\pm2\sqrt{3}i}$이다.

(3) 좌변을 인수분해하면

$(x+3)^3=0$

따라서 구하는 근은 $\boldsymbol{x=-3}$이다.

(4) 좌변을 인수분해하면

$(x-2)^3=0$

따라서 구하는 근은 $\boldsymbol{x=2}$이다.

교과서 98 쪽

먼저 인수분해 공식을 이용하여 방정식의 근을 구하여 보자.

예제 01 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3+1=0$　　(2) $x^3-3x^2+3x-1=0$

풀이 (1) 좌변을 인수분해하면 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로

$x+1=0$ 또는 $x^2-x+1=0$

따라서 구하는 근은 $x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

(2) 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^3=0$이므로　$x-1=0$

따라서 구하는 근은 $x=1$이다.

답 (1) $x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$　(2) $x=1$

이차방정식 $(x-a)^2=0$의 근 a를 중근 또는 이중근이라 하고, 삼차방정식 $(x-a)^3=0$의 근 a를 삼중근이라고 한다.

문제 1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3+8=0$　　(2) $x^3-64=0$

(3) $x^3+9x^2+27x+27=0$　　(4) $x^3-6x^2+12x-8=0$

예제 02 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-9x=0$　　(2) $x^4-6x^2-16=0$

풀이 (1) 좌변을 공통인수 x로 묶고 인수분해하면　$x(x+3)(x-3)=0$

$x=0$ 또는 $x+3=0$ 또는 $x-3=0$

따라서 구하는 근은 $x=0$ 또는 $x=\pm3$이다.

(2) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은　$X^2-6X-16=0$, $(X-8)(X+2)=0$

$X=8$ 또는 $X=-2$

$X=x^2$이므로　$x^2=8$ 또는 $x^2=-2$

따라서 구하는 근은 $x=\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$이다.

답 (1) $x=0$ 또는 $x=\pm3$　(2) $x=\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}i$

인수분해를 이용하여 방정식을 풀 때, 공통인수가 있으면 공통인수로 묶고, 공통부분이 있으면 그것을 하나의 문자로 놓고 인수분해하여 푼다.

문제 2 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3+2x^2-3x=0$　　(2) $3x^4+x^3+3x^2+x=0$

(3) $x^4-x^2-6=0$　　(4) $x^4-11x^2+18=0$

2

목표| 공통인수가 있으면 공통인수로 묶거나 공통부분이 있으면 치환을 이용하여 삼차, 사차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) 좌변을 인수분해하면　$x(x-1)(x+3)=0$

따라서 구하는 근은 $\boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=-3}$ 이다.

(2) 좌변을 인수분해하면　$x(3x+1)(x^2+1)=0$

따라서 구하는 근은 $\boldsymbol{x=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=-\frac{1}{3}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\pm i}$ 이다.

(3) $x^2=X$로 놓으면 주어진 사차방정식은

$X^2-X-6=0$, $(X-3)(X+2)=0$

$X=3$ 또는 $X=-2$

따라서 구하는 근은 $\boldsymbol{x=\pm\sqrt{3}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\pm\sqrt{2}i}$이다.

(4) $x^2=X$로 놓으면 주어진 사차방정식은

$X^2-11X+18=0$, $(X-9)(X-2)=0$

$X=9$ 또는 $X=2$

따라서 구하는 근은 $\boldsymbol{x=\pm3}$ **또는** $\boldsymbol{x=\pm\sqrt{2}}$이다.

지/도/자/료

계수가 실수인 이차방정식이 복소수 범위에서 2개의 근을 가지는 것과 같이 계수가 실수인 삼차방정식과 사차방정식은 복소수 범위에서 각각 3개, 4개의 근을 가진다.

이때 삼차방정식은 반드시 실근이 하나 이상 존재하지만 사차방정식은 실근이 하나도 존재하지 않는 경우가 있다.

3

목표| 인수정리와 조립제법을 이용하여 삼차, 사차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$이라고 하면 $P(1)=0$이므로 인수정리에 의하여 $x-1$은 $P(x)$의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

인수정리
x에 대한 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(a)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-a$로 나누어떨어진다. 또 $P(x)$가 $x-a$로 나누어떨어지면 $P(a)=0$이다.

이제 인수정리를 이용하여 방정식의 근을 구하는 방법을 알아보자.
다항식 $P(x)$에 대하여 $P(a)=0$이면 $x-a$는 $P(x)$의 인수이므로

$$P(x)=(x-a)Q(x)\ (Q(x)\text{는 } x\text{에 대한 다항식})$$

와 같이 인수분해할 수 있다.
따라서 이것을 이용하여 방정식의 근을 구할 수 있다.

예제 03 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-7x+6=0$　　(2) $x^4-3x^3+5x^2-9x+6=0$

풀이 (1) $P(x)=x^3-7x+6$이라고 하면 $P(1)=0$이므로 인수정리에 의하여 $x-1$은 $P(x)$의 인수이다.
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	0	−7	6
		1	1	−6
	1	1	−6	0

$P(x)=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x-2)(x+3)$
이므로 주어진 방정식은
$(x-1)(x-2)(x+3)=0$
$x-1=0$ 또는 $x-2=0$ 또는 $x+3=0$
따라서 구하는 근은 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-3$이다.

(2) $P(x)=x^4-3x^3+5x^2-9x+6$이라고 하면 $P(1)=0$이므로 $x-1$은 $P(x)$의 인수이다.
$P(x)=(x-1)(x^3-2x^2+3x-6)$
$Q(x)=x^3-2x^2+3x-6$이라고 하면 $Q(2)=0$이므로 $x-2$는 $Q(x)$의 인수이다.
$Q(x)=(x-2)(x^2+3)$

1	1	−3	5	−9	6
		1	−2	3	−6
2	1	−2	3	−6	0
		2	0	6	
	1	0	3	0	

그러므로 주어진 방정식은
$(x-1)(x-2)(x^2+3)=0$
$x-1=0$ 또는 $x-2=0$ 또는 $x^2+3=0$
따라서 구하는 근은 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}i$이다.

답 (1) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-3$　(2) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}i$

문제 3 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-2x^2-5x+6=0$　　(2) $x^3-3x^2-10x+24=0$
(3) $x^4+2x^3-x^2-4x-2=0$　　(4) $2x^4-7x^3+x^2+7x-3=0$

1	1	−2	−5	6
		1	−1	−6
	1	−1	−6	0

$P(x)=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x-3)(x+2)$
이므로 주어진 방정식은
$(x-1)(x-3)(x+2)=0$
따라서 구하는 근은 **$x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=-2$**
이다.

(2) $P(x)=x^3-3x^2-10x+24$라고 하면 $P(2)=0$이므로 인수정리에 의하여 $x-2$는 $P(x)$의 인수이다.
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

2	1	−3	−10	24
		2	−2	−24
	1	−1	−12	0

$P(x)=(x-2)(x^2-x-12)=(x-2)(x-4)(x+3)$
이므로 주어진 방정식은
$(x-2)(x-4)(x+3)=0$
따라서 구하는 근은 **$x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-3$**이다.

(3) $P(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$라고 하면 $P(-1)=0$이므로 인수정리에 의하여 $x+1$은 $P(x)$의 인수이다.
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

−1	1	2	−1	−4	−2
		−1	−1	2	2
−1	1	1	−2	−2	0
		−1	0	2	
	1	0	−2	0	

$P(x)=(x+1)^2(x^2-2)$이므로 주어진 방정식은
$(x+1)^2(x^2-2)=0$
따라서 구하는 근은
$x=-1$(중근) 또는 $x=\pm\sqrt{2}$이다.

(4) $P(x)=2x^4-7x^3+x^2+7x-3$이라고 하면 $P(1)=P(-1)=0$이므로 인수정리에 의하여 $x-1$과 $x+1$은 $P(x)$의 인수이다.
조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	2	−7	1	7	−3
		2	−5	−4	3
−1	2	−5	−4	3	0
		−2	7	−3	
	2	−7	3	0	

$P(x)=(x-1)(x+1)(2x^2-7x+3)$
$\quad=(x-1)(x+1)(2x-1)(x-3)$
이므로 주어진 방정식은
$(x-1)(x+1)(2x-1)(x-3)=0$
따라서 구하는 근은
$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$이다.

교과서 100 쪽

삼차방정식이나 사차방정식의 한 근이 주어졌을 때, 다른 근을 구하여 보자.

❶ 예제 **04** 삼차방정식 $x^3-px^2+qx+2=0$의 한 근이 i일 때, 다음을 구하여라. (단, p, q는 실수)

(1) p, q의 값　　(2) 나머지 두 근

풀이 (1) 주어진 방정식에 $x=i$를 대입하면

$$i^3-pi^2+qi+2=0$$
$$-i+p+qi+2=0$$
$$(p+2)+(q-1)i=0$$

p, q가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$p+2=0,\ q-1=0$$
$$p=-2,\ q=1$$

(2) (1)의 결과에 의해 주어진 삼차방정식은

$$x^3+2x^2+x+2=0$$
$$x^2(x+2)+(x+2)=0$$
$$(x+2)(x^2+1)=0$$
$$x=-2 \text{ 또는 } x=\pm i$$

따라서 나머지 두 근은 $x=-2$ 또는 $x=-i$이다.

답 (1) $p=-2$, $q=1$　(2) $x=-2$ 또는 $x=-i$

● 복소수가 서로 같을 조건
a, b가 실수일 때 $a+bi=0$이면 $a=0$, $b=0$이다.
또 $a=0$, $b=0$이면 $a+bi=0$이다.

문제 **4** 삼차방정식 $x^3+px+q=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 다음을 구하여라. (단, p, q는 실수)

(1) p, q의 값　　(2) 나머지 두 근

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

❷ 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여 보자.

(1) $\omega^{100}+\omega^{200}+\omega^{300}$　　(2) $\omega+\dfrac{1}{\omega}$

본문 해설

❶ 계수가 실수인 이차 이상의 방정식의 한 근이 허근이면 그 켤레복소수도 근이 된다.

예를 들어 $z=p+qi$ (p, q는 실수, $q\neq0$)가 계수가 실수인 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근이라고 하면

$az^3+bz^2+cz+d=0$에서

$$\overline{az^3+bz^2+cz+d}$$
$$=a(\overline{z})^3+b(\overline{z})^2+c\cdot\overline{z}+d=0$$

따라서 $\overline{z}=p-qi$도 원래 방정식의 근이다.

4

목표| 삼차방정식의 한 근이 주어질 때, 삼차방정식의 나머지 두 근을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 주어진 방정식에 $x=1+i$를 대입하여 i에 대하여 정리하면

$$(p+q-2)+(p+2)i=0$$

p, q가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여　$p+q-2=0$, $p+2=0$

$\boldsymbol{p=-2,\ q=4}$

(2) (1)의 결과에 의하여 주어진 삼차방정식은

$$x^3-2x+4=0$$
$$(x+2)(x^2-2x+2)=0$$
$$x=-2 \text{ 또는 } x=1\pm i$$

따라서 나머지 두 근은 $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=1-i}$이다.

본문 해설

❷ 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 하면 ω는 $x^3=1$의 근이므로 $\omega^3=1$이다.

또 ω는 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$의 허근이므로 $x^2+x+1=0$의 근이다. 즉, $\omega^2+\omega+1=0$이다.

한편 $x^2+x+1=0$은 서로 켤레복소수인 두 허근 ω, $\overline{\omega}$를 가지므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$$

따라서 $\omega\overline{\omega}=1$, $\omega^3=1$로부터

$$\overline{\omega}=\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^3}{\omega}=\omega^2,\ \overline{\omega}=\omega^2$$

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근 ω의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| ω는 $x^3-1=0$의 허근이므로

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서

$\omega^2+\omega+1=0$

(1) ω는 $x^3=1$의 근이므로　$\omega^3=1$

$$\omega^{100}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega=1^{33}\cdot\omega=1\cdot\omega=\omega$$
$$\omega^{200}=(\omega^3)^{66}\cdot\omega^2=1^{66}\cdot\omega^2=1\cdot\omega^2=\omega^2$$
$$\omega^{300}=(\omega^3)^{100}=1^{100}=1$$

따라서 $\omega^{100}+\omega^{200}+\omega^{300}=\omega+\omega^2+1=0$이다.

(2) $\omega^2+\omega+1=0$에서 $\omega^2+1=-\omega$이므로

$$\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

교과서 101 쪽

02 연립방정식

● 미지수가 3개인 연립일차방정식과 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.

미지수가 3개인 연립일차방정식을 어떻게 푸는가?

생각 열기 **구장산술**

지금으로부터 2000년 전 중국에서는 이미 방정식, 피타고라스 정리, 원주율 등을 알고 실생활에 응용하고 있었다. 특히 고대 중국의 수학 책인 “구장산술”은 조세 및 부역의 징발, 관개 수로 사업 등을 담당하던 관리들의 필독서였다. 모두 9개의 장(章)으로 이루어진 “구장산술”의 제8장인 ‘방정’ 장에서 현재 우리가 사용하고 있는 방정식이란 용어가 유래되었다.

탐구 활동 **다음은 “구장산술”의 ‘방정’ 장에 나와 있는 문제이다. 물음에 답하여 보자.**

> 상급 벼가 2단, 중급 벼가 3단, 하급 벼가 4단이 있다. 아래 세 가지의 경우는 모두 각각에서 나오는 쌀의 양이 정확히 1가마니가 된다.
> ① 상급 벼 2단과 중급 벼 1단
> ② 중급 벼 3단과 하급 벼 1단
> ③ 하급 벼 4단과 상급 벼 1단

1. 상급 벼, 중급 벼, 하급 벼 1단에서 나오는 쌀의 양을 각각 x, y, z가마니로 놓고, ①, ②, ③에서 나오는 쌀의 양을 x, y, z를 이용하여 나타내어 보자.
2. ②에서 구한 식에서 z를 y에 대한 식으로 나타내어 보자.
3. 2에서 구한 식을 ③에서 구한 식에 대입하여 만든 식과 ①에서 구한 식을 연립하여 x와 y의 값을 구하여 보자.
4. 3에서 구한 x, y의 값을 이용하여 z의 값을 구할 수 있는가?

미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 때에는 먼저 미지수 중에서 하나를 소거하여 푼다는 것을 중학교에서 배웠다.

❶ 이와 같은 방법으로 미지수가 3개인 연립일차방정식은 미지수 중에서 하나를 소거하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 만들어 풀면 편리하다.

02 연립방정식

소단원 지도 목표

① 미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀 수 있게 한다.
② 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 미지수가 3개인 연립일차방정식도 미지수를 하나 소거하여 미지수가 2개인 연립일차방정식의 풀이와 같은 방법을 이용함을 이해하게 한다.

2. 연립이차방정식은 적어도 하나가 인수분해되는 경우만 다루고, 지나치게 복잡한 것은 다루지 않는다.

3. 연립방정식의 해는 무수히 많을 수도 있고 없을 수도 있음에 유의하여 지도한다.

4. 연립방정식의 해를 구한 다음, 구한 해가 문제의 조건에 맞는지 확인하는 습관을 갖도록 지도한다.

생각 열기 참/고/자/료

‘방정식’이라는 말은 서기 263년에 삼국 시대 위나라의 유휘가 주석을 붙여서 펴낸 중국의 수학책 “구장산술”에서 유래되었다. 이 책의 제8장 ‘방정(方程)’에서 우리가 현재 연립방정식이라고 부르고 있는 것을 풀 때, 계수들을 마방진과 같은 틀 안에 써 놓고 해를 구하였는데 사각형(方) 안에서 이루어지는 과정(程)이라는 뜻으로 그 풀이 방법을 ‘방정(方程)’이라고 하였다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 이 탐구 활동은 미지수가 3개인 연립일차방정식에서 미지수를 2개로 줄이는 방법을 이해하기 위한 것이다.

1. ① $2x+y=1$
② $3y+z=1$
③ $4z+x=1$

2. $z=1-3y$

3. $\begin{cases} 4(1-3y)+x=1 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} x-12y=-3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

연립방정식을 풀면 $x=\frac{9}{25}$, $y=\frac{7}{25}$

4. $z=1-3y$에 $y=\frac{7}{25}$을 대입하면 $z=\frac{4}{25}$

따라서 z의 값을 구할 수 있다.

본문 해설

❶ 미지수가 3개인 연립일차방정식의 풀이는 미지수를 하나 소거하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 만든 후, 중학교에서 배운 미지수가 2개인 연립일차방정식의 풀이법을 이용하도록 한다.

1

목표| 미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $\begin{cases} x+y+z=6 & \cdots\cdots ① \\ 2x+y-z=1 & \cdots\cdots ② \\ x+2y-z=2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

①+②에서 $3x+2y=7$ ······ ④

②−③에서 $x-y=-1$ ······ ⑤

④+⑤×2에서 $5x=5$이므로

$x=1$, $y=2$

$x=1$, $y=2$를 ①에 대입하면 $z=3$

따라서 구하는 해는

$\boldsymbol{x=1,\ y=2,\ z=3}$

(2) $\begin{cases} x+y-z=6 & \cdots\cdots ① \\ x-2y=-1 & \cdots\cdots ② \\ 2x+3z=3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

①×2+②에서 $3x-2z=11$ ······ ④

③×3−④×2에서 $13z=-13$이므로

$z=-1$

$z=-1$을 ③에 대입하면 $x=3$

$x=3$을 ②에 대입하면 $y=2$

따라서 구하는 해는

$\boldsymbol{x=3,\ y=2,\ z=-1}$

교과서 102 쪽

예제 01 다음 연립일차방정식을 풀어라.

$\begin{cases} 2x+y+z=8 & \cdots\cdots ① \\ x+2y+z=6 & \cdots\cdots ② \\ x+y+2z=2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

풀이 먼저 z를 소거하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 만든다.

①−②에서 $x-y=2$ ······ ④

②×2−③에서 $x+3y=10$ ······ ⑤

④, ⑤를 연립하여 풀면 $x=4$, $y=2$

$x=4$, $y=2$를 ①에 대입하여 풀면 $z=-2$

따라서 구하는 해는 $x=4$, $y=2$, $z=-2$이다.

답 $x=4$, $y=2$, $z=-2$

다른 풀이 주어진 세 방정식을 변끼리 모두 더하면

$4x+4y+4z=16$

$x+y+z=4$ ······ ⑥

①−⑥에서 $x=4$

②−⑥에서 $y=2$

③−⑥에서 $z=-2$

따라서 구하는 해는 $x=4$, $y=2$, $z=-2$이다.

문제 1 다음 연립일차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y-z=6 \\ x-2y=-1 \\ 2x+3z=3 \end{cases}$

문제 2 다음 연립일차방정식을 풀어라.

$A=B=C=a$ (a는 상수) 꼴의 방정식은 연립방정식 $\begin{cases} A=a \\ B=a \\ C=a \end{cases}$ 와 같다.

❶ (1) $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=7 \\ z+x=2 \end{cases}$ (2) $-x+y+z=x-y+z=x+y-z=5$

본문 해설

❶ 특수한 꼴의 연립방정식은 그 모양에 따라 알맞은 방법을 사용하여 푼다. 예를 들어

$\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ z+x=c \end{cases}$

꼴의 연립일차방정식은 세 식의 양변을 모두 더한 결과인 $x+y+z=d$ 꼴에 원래의 방정식을 하나씩 대입하여 풀면 편리하다.

2

목표| 미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $\begin{cases} x+y=1 & \cdots\cdots ① \\ y+z=7 & \cdots\cdots ② \\ z+x=2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

주어진 세 방정식을 변끼리 모두 더하면

$2x+2y+2z=10$

$x+y+z=5$ ······ ④

④−①에서 $z=4$

④−②에서 $x=-2$

④−③에서 $y=3$

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{x=-2,\ y=3,\ z=4}$이다.

(2) $\begin{cases} -x+y+z=5 & \cdots\cdots ① \\ x-y+z=5 & \cdots\cdots ② \\ x+y-z=5 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

①+②+③에서 $x+y+z=15$ ······ ④

④−①에서 $2x=10$

④−②에서 $2y=10$

④−③에서 $2z=10$

따라서 구하는 해는 $\boldsymbol{x=y=z=5}$이다.

문제 3 어떤 농구 시합에서 A팀이 슛을 33회 성공시켜 61점을 득점하였다. 2점 슛으로 얻은 점수와 3점 슛으로 얻은 점수가 같을 때, 1점, 2점, 3점에 대한 점수별 슛의 성공 횟수를 각각 구하여라.

미지수가 2개인 연립일차방정식과 마찬가지로 미지수가 3개인 연립일차방정식도 해가 무수히 많거나 없는 경우도 있다.

예제 02 다음 연립일차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 7x+2y+z=5 & \cdots\cdots ① \\ 2x+y+z=1 & \cdots\cdots ② \\ x-y-2z=2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+3y+z=2 & \cdots\cdots ① \\ x-y-z=-1 & \cdots\cdots ② \\ 2x+4y+z=1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

풀이 (1) 먼저 z를 소거하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 만든다.
①−②에서 $5x+y=4$ ⋯⋯ ④
②×2+③에서 $5x+y=4$ ⋯⋯ ⑤
④와 ⑤는 일치하므로 x, y의 값은 하나로 정해지지 않는다.
이때 $x=k$ (k는 임의의 실수)라고 하면 $y=-5k+4$
$x=k$, $y=-5k+4$를 ②에 대입하여 풀면 $z=3k-3$
따라서 구하는 해는
❶ $x=k$, $y=-5k+4$, $z=3k-3$ (k는 임의의 실수)
으로 나타낼 수 있는 모든 수이므로 무수히 많다.
(2) 먼저 z를 소거하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 만든다.
①+②에서 $2x+2y=1$ ⋯⋯ ④
②+③에서 $3x+3y=0$ ⋯⋯ ⑤
④, ⑤에서 각각 $x+y=\frac{1}{2}$, $x+y=0$이 되므로 $\frac{1}{2}=0$이라는 모순이 생긴다.
따라서 구하는 해는 없다.

답 (1) $x=k$, $y=-5k+4$, $z=3k-3$ (k는 임의의 실수) (2) 해는 없다.

문제 4 다음 연립일차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x-3y+2z=-4 \\ 4x+3y-z=5 \\ 11x-3y+4z=-2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ x-3y+2z=-1 \end{cases}$

본문 해설

❶ 연립일차방정식의 해가 무수히 많은 경우에 해를 나타내는 방법은 유일하지 않다. 예를 들어 예제 02(1)의 연립방정식의 해는

$x=-\frac{k-4}{5}$, $y=k$, $z=-\frac{3k+3}{5}$

또는 $x=\frac{1}{3}k+1$, $y=-\frac{5}{3}k+5$, $z=k$

(k는 임의의 실수)로 나타낼 수도 있다.
이때 어떤 표현으로 나타내어도 결국 같은 해를 나타내게 된다.

3

목표| 미지수가 3개인 연립일차방정식을 활용하여 실생활 문제를 풀 수 있게 한다.

풀이| 1점, 2점, 3점에 대한 점수별 슛의 성공 횟수를 각각 x회, y회, z회라고 하면

$\begin{cases} x+y+z=33 & \cdots\cdots ① \\ x+2y+3z=61 & \cdots\cdots ② \\ 2y=3z & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

②−①에서 $y+2z=28$
$y=28-2z$ ⋯⋯ ④
④를 ③에 대입하면 $56-4z=3z$, $7z=56$, $z=8$
따라서 $x=13$, $y=12$, $z=8$이다.
즉, 1점, 2점, 3점에 대한 점수별 슛의 성공 횟수는 각각 **13회, 12회, 8회**이다.

4

목표| 해가 무수히 많은 경우와 해가 없는 경우의 미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $\begin{cases} x-3y+2z=-4 & \cdots\cdots ① \\ 4x+3y-z=5 & \cdots\cdots ② \\ 11x-3y+4z=-2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

①+②에서 $5x+z=1$ ⋯⋯ ④
②+③에서 $15x+3z=3$ ⋯⋯ ⑤
④와 ⑤는 일치하므로 x, y의 값은 하나로 정해지지 않는다. 이때 $x=k$(k는 임의의 실수)라고 하면
$z=-5k+1$
$x=k$, $z=-5k+1$을 ②에 대입하면 $y=-3k+2$
따라서 주어진 연립방정식의 해는
$x=k$, $y=-3k+2$, $z=-5k+1$(k는 임의의 실수)
로 나타낼 수 있는 모든 수이므로 무수히 많다.

(2) $\begin{cases} x+y-2z=1 & \cdots\cdots ① \\ x-2y+z=-2 & \cdots\cdots ② \\ x-3y+2z=-1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

①−②에서 $3y-3z=3$ ⋯⋯ ④
②−③에서 $y-z=-1$ ⋯⋯ ⑤
④에서 $y-z=1$이므로 ⑤와 서로 모순이다.
따라서 주어진 연립방정식의 **해는 없다.**

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 집, 학교, 체육관 사이의 거리를 소재로 하여 미지수가 2개인 연립이차방정식을 만들어 봄으로써 연립이차방정식을 실생활에서 쉽게 이용할 수 있음을 알고 그 풀이의 필요성을 느끼도록 하기 위한 것이다.

1. 집, 학교, 체육관 세 지점 사이의 거리의 합은 2.4 km이므로
$\boldsymbol{x+y+1=2.4}$**(km)**

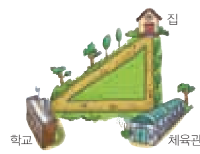
2. 집, 학교, 체육관을 연결하는 도로는 집과 학교 사이의 도로를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로
$\boldsymbol{x^2+y^2=1}$

교과서 104 쪽

미지수가 2개인 연립이차방정식을 어떻게 푸는가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 모양으로 집, 학교, 체육관의 세 지점을 연결하는 도로가 있다. 집, 학교, 체육관 세 지점 사이의 거리의 합은 2.4 km이고, 집에서 학교까지의 거리는 1 km라고 한다. 다음 물음에 답하여 보자. (단, 학교와 체육관 사이의 거리가 집과 체육관 사이의 거리보다 멀고, 세 건물의 크기는 무시한다.)



1. 학교와 체육관 사이의 거리를 x km, 집과 체육관 사이의 거리를 y km라고 할 때, 세 지점 사이의 거리의 합을 x, y로 나타내어 보자.

2. 피타고라스 정리를 이용하여 x와 y 사이의 관계식을 구하여 보자.

미지수가 2개인 연립방정식에서 차수가 가장 높은 방정식이 이차방정식일 때, 이 연립방정식을 미지수가 2개인 연립이차방정식이라고 한다.

미지수가 2개인 연립이차방정식에는 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 것과 이차방정식으로만 이루어진 것의 두 종류가 있다.

먼저 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식을 푸는 방법을 알아보자.

이 경우에는 일차방정식을 변형하여 한 미지수를 다른 미지수로 나타낸 다음, 이차방정식에 대입하여 미지수가 1개인 이차방정식으로 만들어 푼다.

예제 03 다음 연립이차방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots\cdots ① \\ x^2-3y^2=6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

풀이 ①에서 $x=2y+1$ ······ ③

③을 ②에 대입하면 $(2y+1)^2-3y^2=6$, $y^2+4y-5=0$

$(y+5)(y-1)=0$, $y=-5$ 또는 $y=1$

이것을 ③에 대입하면 $y=-5$일 때 $x=-9$, $y=1$일 때 $x=3$이므로 구하는 해는

$$\begin{cases} x=-9 \\ y=-5 \end{cases} \text{또는} \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

답 $\begin{cases} x=-9 \\ y=-5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

5

목표 | 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\begin{cases} 3x+y=1 & \cdots\cdots ① \\ x^2-2y=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=1-3x$ ······ ③

③을 ②에 대입하면

$x^2-2(1-3x)=5$, $x^2+6x-7=0$

$(x-1)(x+7)=0$, $x=1$ 또는 $x=-7$

이것을 ③에 대입하면 구하는 해는

$\boldsymbol{\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}}$ **또는** $\boldsymbol{\begin{cases} x=-7 \\ y=22 \end{cases}}$

(2) $\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=29 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=3-x$ ······ ③

③을 ②에 대입하면

$x^2+(3-x)^2=29$, $x^2-3x-10=0$

$(x+2)(x-5)=0$, $x=-2$ 또는 $x=5$

이것을 ③에 대입하면 구하는 해는

$\boldsymbol{\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}}$ **또는** $\boldsymbol{\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}}$

(3) 구하는 x, y의 값은 이차방정식 $t^2-t-12=0$의 두 근이다.

이 이차방정식을 풀면

$(t+3)(t-4)=0$

$t=-3$ 또는 $t=4$

이 방정식의 두 근이 -3과 4이므로 구하는 해는

$\boldsymbol{\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}}$ **또는** $\boldsymbol{\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}}$

참고 | (3) 연립이차방정식에서 한쪽이 일차방정식인 경우에는 일반적으로 한 미지수를 다른 미지수에 대입하여 한 미지수를 소거한 다음 구하지만

$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$

와 같은 특수한 꼴의 경우에는 이차방정식의 근과 계수의 관계에서 이차방정식 $t^2-at+b=0$의 두 근이 x, y가 됨을 이용하여 구할 수 있다.

교과서 105 쪽

문제 5 다음 연립이차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 3x+y=1 \\ x^2-2y=5 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=29 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-12 \end{cases}$

발전 **문제 6** 둘레의 길이가 16 cm이고, 넓이가 15 cm^2인 직사각형의 대각선의 길이를 구하여라.

이차방정식으로만 이루어진 연립이차방정식을 푸는 경우에는 어느 한 이차식을 일차식의 곱으로 인수분해하여 일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식으로 바꾸어 푼다.

예제 04 다음 연립이차방정식을 풀어라.

$\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

● 상수항이 0인 식을 인수분해한다.

풀이 ①의 좌변을 인수분해하면 $(x+y)(2x-y)=0$

$y=-x$ 또는 $y=2x$

(i) $y=-x$를 ②에 대입하면 $x^2+x^2=10$, $x^2=5$, $x=\pm\sqrt{5}$

따라서 $x=\sqrt{5}$일 때 $y=-\sqrt{5}$, $x=-\sqrt{5}$일 때 $y=\sqrt{5}$이다.

(ii) $y=2x$를 ②에 대입하면 $x^2+4x^2=10$, $x^2=2$, $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 $x=\sqrt{2}$일 때 $y=2\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$일 때 $y=-2\sqrt{2}$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$

문제 7 다음 연립이차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 \\ 2x^2+xy+y^2=8 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 \\ x^2-2xy+2y^2=5 \end{cases}$

6

목표| 조건에 맞는 연립방정식을 세우고, 이를 풀 수 있게 한다.

풀이| 직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라고 하면 둘레의 길이가 16 cm이므로

$2x+2y=16$, $x+y=8$

또 넓이가 15 cm^2이므로 $xy=15$

구하는 x, y의 값은 이차방정식 $t^2-8t+15=0$의 두 근이다.

이 이차방정식을 풀면

$(t-3)(t-5)=0$

$t=3$ 또는 $t=5$

이 방정식의 두 근이 3과 5이므로

$\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

따라서 구하는 대각선의 길이는

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+5^2}=\boldsymbol{\sqrt{34}}$**(cm)**

7

목표| 두 개의 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ 2x^2+xy+y^2=8 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①의 좌변을 인수분해하면

$(x-y)(2x-y)=0$

$y=x$ 또는 $y=2x$

(i) $y=x$를 ②에 대입하면

$4x^2=8$, $x^2=2$

$x=\pm\sqrt{2}$

따라서 $x=\sqrt{2}$일 때 $y=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$일 때 $y=-\sqrt{2}$이다.

(ii) $y=2x$를 ②에 대입하면

$8x^2=8$, $x^2=1$

$x=\pm1$

따라서 $x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$이다.

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\boldsymbol{\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}}$ **또는** $\boldsymbol{\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}}$ **또는** $\boldsymbol{\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}}$

또는 $\boldsymbol{\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}}$

(2) $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-2xy+2y^2=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①의 좌변을 인수분해하면

$(x+y)(x-3y)=0$

$x=-y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-y$를 ②에 대입하면 $5y^2=5$, $y^2=1$

$y=\pm1$

따라서 $y=1$일 때 $x=-1$, $y=-1$일 때 $x=1$이다.

(ii) $x=3y$를 ②에 대입하면 $5y^2=5$, $y^2=1$

$y=\pm1$

따라서 $y=1$일 때 $x=3$, $y=-1$일 때 $x=-3$이다.

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\boldsymbol{\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}}$ **또는** $\boldsymbol{\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}}$ **또는** $\boldsymbol{\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}}$

또는 $\boldsymbol{\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}}$

교과서 106 쪽

이차방정식으로만 이루어진 연립이차방정식에서 두 이차방정식의 상수항이 모두 0이 아닌 경우에는 상수항을 소거한 후 인수분해하여 푼다.

예제 05 다음 연립이차방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 & \cdots\cdots ① \\ x^2-xy+y^2=3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

풀이 ①−②에서 $xy-2y^2=0$, $y(x-2y)=0$

$y=0$ 또는 $x=2y$

(i) $y=0$을 ①에 대입하면 $x^2=3$, $x=\pm\sqrt{3}$

(ii) $x=2y$를 ①에 대입하면 $4y^2-y^2=3$, $y^2=1$, $y=\pm1$

따라서 $y=1$일 때 $x=2$, $y=-1$일 때 $x=-2$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

문제 8 다음 연립이차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x^2-3xy-y^2=-2 \\ x^2-3xy+4y^2=2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-2xy=3 \\ xy-y^2=2 \end{cases}$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

다음 표는 탄수화물, 지방, 단백질을 섭취하여 얻은 총열량을 나타낸 것이다.

탄수화물(g)	지방(g)	단백질(g)	총열량(kcal)
200	20	230	1900
200	40	210	2000
240	50	260	2450

이때 탄수화물, 지방, 단백질 1 g이 낼 수 있는 열량을 각각 구하여라.

8

목표 두 개의 상수항이 0이 아닌 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이 (1) $\begin{cases} 2x^2-3xy-y^2=-2 & \cdots\cdots ① \\ x^2-3xy+4y^2=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①+②에서

$3x^2-6xy+3y^2=0$, $3(x-y)^2=0$,

$x=y$

$x=y$를 ②에 대입하면

$x^2-3x^2+4x^2=2$, $2x^2=2$, $x=\pm1$

따라서 $x=1$일 때 $y=1$, $x=-1$일 때 $y=-1$이므로 구하는 해는

$\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-2xy=3 & \cdots\cdots ① \\ xy-y^2=2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①×2−②×3에서

$2x^2-7xy+3y^2=0$, $(2x-y)(x-3y)=0$

$2x=y$ 또는 $x=3y$

(i) $2x=y$를 ①에 대입하면

$x^2-4x^2=3$, $x^2=-1$, $x=\pm i$

따라서 $x=i$일 때 $y=2i$, $x=-i$일 때 $y=-2i$이다.

(ii) $x=3y$를 ②에 대입하면

$3y^2-y^2=2$, $y^2=1$, $y=\pm1$

따라서 $y=1$일 때 $x=3$, $y=-1$일 때 $x=-3$이다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 해는

$\begin{cases} \boldsymbol{x=i} \\ \boldsymbol{y=2i} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-i} \\ \boldsymbol{y=-2i} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=3} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases}$ **또는** $\begin{cases} \boldsymbol{x=-3} \\ \boldsymbol{y=-1} \end{cases}$

단원 과제

목표 미지수가 3개인 연립일차방정식을 활용하여 실생활 문제를 풀 수 있게 한다.

풀이 탄수화물, 지방, 단백질 1 g이 낼 수 있는 열량을 각각 x kcal, y kcal, z kcal라고 하면

$$\begin{cases} 200x+20y+230z=1900 & \cdots\cdots ① \\ 200x+40y+210z=2000 & \cdots\cdots ② \\ 240x+50y+260z=2450 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②−①에서 $20y-20z=100$이므로

$y-z=5$ ⋯⋯ ④

③×5−②×6에서 $10y+40z=250$이므로

$y+4z=25$ ⋯⋯ ⑤

④, ⑤를 연립하여 풀면 $y=9$, $z=4$

$y=9$, $z=4$를 ①에 대입하여 풀면 $x=4$

따라서 탄수화물, 지방, 단백질 1 g이 낼 수 있는 열량은 각각 4 kcal, 9 kcal, 4 kcal이다.

지/도/자/료

주어진 연립방정식의 각 방정식을 변끼리 서로 곱하여 쉽게 해결되는 경우도 있다.

예를 들면 연립방정식 $\begin{cases} xy=2 \\ yz=3 \\ zx=6 \end{cases}$ 에서 세 식을 변끼리 곱하면

$(xyz)^2=6^2$, $xyz=\pm6$이므로

$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=-3 \end{cases}$

교과서 107 쪽

중단원 기초

[해답 p.223]

수준별 학습

1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-9x=0$　　(2) $x^3-27=0$

(3) $x^4-4x^2+3=0$　　(4) $x^4-x^2-12=0$

01 삼차방정식과 사차방정식
인수분해 공식을 이용한 방정식의 풀이

2 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3+3x^2-4=0$　　(2) $x^3-2x-4=0$

(3) $x^3-6x^2+11x-6=0$　　(4) $x^4+x^3-x^2-7x-6=0$

01 삼차방정식과 사차방정식
인수정리를 이용한 방정식의 풀이

3 다음 연립일차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-2y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y=4 \\ y+z=-1 \\ z+x=3 \end{cases}$

02 연립방정식
미지수가 3개인 연립일차방정식

4 다음 연립이차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} -x+y=1 \\ x^2+y-1=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-1 \end{cases}$

02 연립방정식
미지수가 2개인 연립이차방정식

5 연립이차방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 풀어라.

02 연립방정식
미지수가 2개인 연립이차방정식

중/단/원 기초

1

목표| 인수분해 공식, 치환을 이용하여 삼차, 사차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $x=0$ 또는 $x=\pm3$

(2) $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(3) $x=\pm1$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

(4) $x=\pm2$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}i$

2

목표| 인수정리와 조립제법을 이용하여 삼차, 사차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $x=1$ 또는 $x=-2$ (중근)

(2) $x=2$ 또는 $x=-1\pm i$

(3) $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(4) $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

3

목표| 미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $\begin{cases} x+y-z=2 & \cdots\cdots ① \\ x-2y+z=2 & \cdots\cdots ② \\ 2x+y-z=3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

①+②를 하면 $2x-y=4$ ⋯⋯ ④

②+③을 하면 $3x-y=5$ ⋯⋯ ⑤

④, ⑤를 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-2$

$x=1,\ y=-2$를 ①에 대입하면 $z=-3$

$x=1,\ y=-2,\ z=-3$

(2) $\begin{cases} x+y=4 & \cdots\cdots ① \\ y+z=-1 & \cdots\cdots ② \\ z+x=3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

①+②+③을 하면

$2(x+y+z)=6$

$x+y+z=3$ ⋯⋯ ④

④−①을 하면 $z=-1$

④−②를 하면 $x=4$

④−③을 하면 $y=0$

$x=4,\ y=0,\ z=-1$

4

목표| 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=1+\sqrt{2} \end{cases}$

5

목표| 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| $\begin{cases} x=\sqrt{10} \\ y=\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{10} \\ y=-\sqrt{10} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

중/단/원 기본

1

목표| 치환을 이용하여 사차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $\boldsymbol{x=-3}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$ **또는** $\boldsymbol{x=-1\pm i}$
(2) $\boldsymbol{x=-2}$ **또는** $\boldsymbol{x=6}$ **또는** $\boldsymbol{x=2\pm3\sqrt{2}}$

2

목표| 삼차방정식의 해의 의미를 이해하게 한다.

풀이| (1) $x=1+\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하여 정리하면
$(5+a)\sqrt{2}+(7+a-b)=0$
$5+a=0,\ 7+a-b=0$
$\boldsymbol{a=-5,\ b=2}$
(2) $x=1-i$를 주어진 방정식에 대입하여 정리하면
$(-2-a)i+(-2+a-b)=0$
$-2-a=0,\ -2+a-b=0,$
$\boldsymbol{a=-2,\ b=-4}$

3

목표| 삼차방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 가로의 길이는 $(x-1)$ cm, 세로의 길이는 $(x-2)$ cm, 높이는 $(x+3)$ cm이므로
$(x-1)(x-2)(x+3)=12,\ x^3-7x-6=0$
$(x+1)(x+2)(x-3)=0$
$x>2$이므로 $\boldsymbol{x=3}$

4

목표| 미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $\boldsymbol{x=2,\ y=-1,\ z=-2}$
(2) $\boldsymbol{x=3,\ y=-1,\ z=1}$
(3) $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$ **또는** $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$
(4) $\begin{cases}x=\sqrt{10}\\y=\sqrt{10}\end{cases}$ **또는** $\begin{cases}x=-\sqrt{10}\\y=-\sqrt{10}\end{cases}$
또는 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ **또는** $\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$

교과서 108 쪽

중단원 기본

[해답 p.223]

수준별 학습

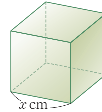
1 다음 방정식을 풀어라.
(1) $(x^2+2x)^2-(x^2+2x)-6=0$
(2) $(x-7)(x-5)(x+1)(x+3)+63=0$

01 삼차방정식과 사차방정식
사차방정식

2 삼차방정식 $x^3+ax-b=0$에 대하여 다음을 구하여라.
(1) 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 두 유리수 a, b의 값
(2) 한 근이 $1-i$일 때, 두 실수 a, b의 값

01 삼차방정식과 사차방정식
삼차방정식

3 한 모서리의 길이가 x cm인 정육면체에서 가로, 세로의 길이를 각각 1 cm, 2 cm씩 줄이고, 높이를 3 cm 늘려서 부피가 12 cm³인 직육면체를 만들었다. x의 값을 구하여라. (단, $x>2$)

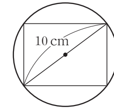


01 삼차방정식과 사차방정식
삼차방정식의 활용

4 다음 연립방정식을 풀어라.
(1) $\begin{cases}x+y+3z=-5\\2x-y-2z=9\\3x+2y-z=6\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x-3y=6\\y-3z=-4\\z-3x=-8\end{cases}$
(3) $\begin{cases}x+y=7\\x^2+y^2=25\end{cases}$ (4) $\begin{cases}3x^2-5xy+2y^2=0\\x^2-2xy+2y^2=10\end{cases}$

02 연립방정식
연립일차방정식과 연립이차방정식

5 오른쪽 그림과 같이 지름의 길이가 10 cm인 원에 둘레의 길이가 28 cm인 직사각형이 내접할 때, 이 직사각형의 두 변의 길이를 구하여라.



02 연립방정식
미지수가 2개인 연립이차방정식의 활용

5

목표| 미지수가 2개인 연립이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 직사각형의 두 변의 길이를 x cm, y cm라고 하면 둘레의 길이가 28 cm이므로
$2x+2y=28,\ x+y=14$
$y=14-x$ ······ ①
또 피타고라스 정리에 의하여
$x^2+y^2=100$ ······ ②
①을 ②에 대입하여 정리하면
$x^2+(14-x)^2=100,\ x^2-14x+48=0$
$(x-6)(x-8)=0,\ x=6$ 또는 $x=8$
이것을 ①에 대입하면
$\begin{cases}x=6\\y=8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\y=6\end{cases}$
따라서 직사각형의 두 변의 길이는 **6 cm, 8 cm**이다.

중단원 실력

[해답 p.223]

수준별 학습

1 삼차방정식 $x^3+ax^2-8x+4b=0$이 중근 $x=2$를 가질 때, 두 실수 a, b의 값을 구하여라.

01 삼차방정식과 사차방정식 / 삼차방정식

2 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

(1) $\omega+\overline{\omega}$

(2) $\omega\overline{\omega}$

(3) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{11}$

01 삼차방정식과 사차방정식 / 삼차방정식

3 연립일차방정식 $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$에 대하여 해의 개수가 다음과 같을 때, 상수 a의 값 또는 그 조건을 구하여라.

(1) 해가 한 쌍만 있는 경우

(2) 해가 무수히 많은 경우

(3) 해가 없는 경우

02 연립방정식 / 미지수가 3개인 연립일차방정식

4 농도가 서로 다른 세 가지 설탕물 A, B, C가 있다. A와 B를 각각 100 g씩 혼합하였더니 15 %의 설탕물이 되었고, A와 C를 각각 100 g, 200 g씩 혼합하였더니 20 %의 설탕물이 되었다. 그리고 B와 C를 각각 100 g, 300 g씩 혼합하였더니 20 %의 설탕물이 되었다. 설탕물 A, B, C의 농도를 각각 구하여라.

02 연립방정식 / 미지수가 3개인 연립일차방정식의 활용

5 대각선의 길이가 10 cm인 직사각형이 있다. 가로의 길이를 4 cm 늘리고 세로의 길이를 1 cm 줄였더니 대각선의 길이가 3 cm 늘어났다고 할 때, 처음 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 구하여라.

02 연립방정식 / 미지수가 2개인 연립이차방정식의 활용

중/단/원 실력

1

목표| 중근의 의미를 알고, 이를 이용하여 미지의 계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^3+ax^2-8x+4b=(x-2)^2(x-k)$

$=x^3+(-4-k)x^2+(4k+4)x-4k$

이므로 $-4-k=a$, $4k+4=-8$, $-4k=4b$

따라서 $k=-3$이므로 $\boldsymbol{a=-1}$, $\boldsymbol{b=3}$이다.

2

목표| $x^3=1$의 한 허근 ω의 여러 가지 성질을 알게 한다.

풀이| ω는 $x^3=1$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$의 허근이므로 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$x^2+x+1=0$의 한 근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

(1) 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=\boldsymbol{-1}$

(2) 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega\overline{\omega}=\boldsymbol{1}$

(3) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{11}$

$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)$

$+\omega^6(1+\omega+\omega^2)+\omega^9(1+\omega+\omega^2)=\boldsymbol{0}$

3

목표| 미지수가 3개인 연립일차방정식의 해의 개수에 따른 성질을 이해하게 한다.

풀이| 세 방정식을 변끼리 모두 더하면

$(a+2)(x+y+z)=3$

(i) $a=-2$일 때 $0\cdot(x+y+z)=3$이므로 해가 없다.

(ii) $a\neq-2$일 때 $x+y+z=\dfrac{3}{a+2}$

• $a=1$이면 주어진 세 방정식이 모두 $x+y+z=1$이 되어 해가 무수히 많다.

• $a\neq1$이면 한 쌍의 해를 가진다.

(1) $\boldsymbol{a\neq-2}$**이고** $\boldsymbol{a\neq1}$

(2) $\boldsymbol{a=1}$

(3) $\boldsymbol{a=-2}$

4

목표| 미지수가 3개인 연립일차방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 설탕물 A, B, C의 농도를 각각 x %, y %, z %라 하고 식을 세워 정리하면

$x+y=30$, $x+2z=60$, $y+3z=80$

세 식을 연립하여 풀면 $x=16$, $y=14$, $z=22$

따라서 설탕물 A, B, C의 농도는 각각 **16 %, 14 %, 22 %**이다.

5

목표| 미지수가 2개인 연립이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 처음 직사각형의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라고 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ (x+4)^2+(y-1)^2=169 \end{cases}$

연립방정식을 풀면 $\begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\dfrac{72}{17} \\ y=-\dfrac{154}{17} \end{cases}$

이때 $y>0$이므로 처음 직사각형의 **가로의 길이는 8 cm**이고, **세로의 길이는 6 cm**이다.

4 여러 가지 부등식

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 부등식의 성질을 이해하고, 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.

② 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있게 한다.

중단원의 구성

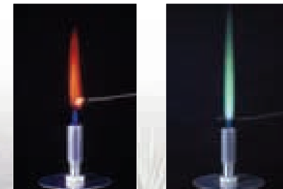
소단원명	지도 내용
01 부등식	부등식의 성질
	절댓값을 포함한 일차부등식
02 이차함수와 이차부등식의 관계	이차함수의 그래프와 이차부등식의 해
	연립이차부등식
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 110 쪽

4 여러 가지 부등식

불꽃놀이의 색으로 원료의 성분을 알 수 있다.

밤하늘을 화려하게 수놓는 불꽃놀이에서 볼 수 있는 여러 가지 색깔은 어떻게 만들어질까? 화려한 색깔의 불꽃은 마그네슘, 알루미늄 등의 여러 가지 금속의 불꽃 반응을 이용한 것이다. 불꽃 반응이란 어떤 물질을 겉불꽃 속에 넣었을 때 그 속에 포함된 원소에 따라 독특한 불꽃색이 나타나는 반응을 말한다. 불꽃 반응이 일어나는 금속은 빛을 흡수하였다가 다시 방출하여 특정 파장의 빛을 내놓는데 금속의 종류마다 내놓는 빛의 파장이 다르기 때문에 불꽃 반응이 다양하게 나타난다. 예를 들어 방출된 빛의 파장이 650 nm(나노미터) 근처이면 붉은색이고 470 nm 근처이면 파란색이다.



스트론튬(Sr)은 짙은 빨간색, 구리(Cu)는 청록색의 빛을 낸다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 114 쪽

부등식을 이용하여 금속의 불꽃 반응 색을 예측할 수 있을까?

들어가면서 금속이 내놓는 빛의 파장의 범위에 따라 불꽃 반응이 다르므로 각 불꽃에 해당하는 파장의 범위를 절댓값을 포함한 부등식으로 표현할 수 있다.

이 단원에서는 부등식의 기본 성질과 절댓값을 포함한 일차부등식을 푸는 방법, 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식을 푸는 방법, 연립이차부등식을 푸는 방법을 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 부등식의 성질을 이해하고, 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.	상	부등식의 성질을 이용하여 절댓값 기호가 두 곳에 나타나는 일차부등식을 풀고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	부등식의 성질을 이용하여 절댓값 기호가 한 곳에 나타나는 일차부등식을 풀 수 있다.
	하	절댓값을 포함한 간단한 일차부등식 ($\lvert x\rvert < a$ 또는 $\lvert x\rvert \ge a$ $(a>0)$ 등)을 풀 수 있다.
2. 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하고, 이차부등식을 풀 수 있다.	상	이차함수와 이차부등식의 관계를 이용하여 이차부등식을 풀고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식을 풀 수 있다.
	하	이차식의 인수분해가 쉬운 이차부등식을 풀 수 있다.
3. 연립이차부등식을 풀 수 있다.	상	연립이차부등식을 풀고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	연립이차부등식을 풀 수 있다.
	하	일차부등식과 인수분해가 쉬운 이차부등식으로 이루어진 연립이차부등식을 풀 수 있다.

교과서 111 쪽

01 부등식

● 부등식의 성질을 이해하고, 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.

부등식의 성질에는 어떤 것이 있는가?

생각 열기 난청

현대인은 스마트폰, MP3 플레이어, 인터넷 강의, 컴퓨터 게임 등 디지털 매체에 많이 노출되어 있고, 이를 이용할 때 대부분 이어폰을 사용하기 때문에 난청이 증가하고 있다. 난청은 타인과 의사소통을 하는 데 어려움을 주며, 현재 효과적인 치료법이 없으므로 이어폰 사용 시 볼륨을 낮추거나 오래 듣지 않는 등 예방에 힘써야 한다.

탐구 활동 다음 표는 난청의 정도에 따라 들을 수 있는 최소 소리의 크기를 나타낸 것이다. 물음에 답하여 보자.

난청의 정도에 따라 들을 수 있는 소리의 크기 (dB: 데시벨)

난청 정도	들을 수 있는 최소 소리의 크기(dB)	회화의 이해 정도
정상	0이상 ~ 30미만	속삭이는 소리까지 들을 수 있음
경도	30 ~ 50	소곤거리는 소리는 듣지 못함
중도	50 ~ 70	가까운 곳의 소리는 들을 수 있음
고도	70 ~ 90	크게 말해야 대화를 할 수 있음
심도	90 ~	소리를 전혀 듣지 못함

1. 들을 수 있는 최소 소리의 크기가 55 dB인 사람의 난청의 정도를 말하여 보자.
2. 소리의 크기가 x dB일 때, 경도 난청인 사람이 들을 수 있는 최소 소리의 크기를 부등호를 사용하여 나타내어 보자.
3. 소리의 크기가 x dB일 때, 심도 난청인 사람이 들을 수 있는 최소 소리의 크기를 부등호를 사용하여 나타내어 보자.

부등호 $<$, $>$, $\leq$, $\geq$를 사용하여 수 또는 식의 대소 관계를 나타낸 식을 부등식이라고 한다.

예를 들어 $3a+4b\geq 2a$, $a^2+2ab<3b^2$, $x^2-3x+6>-2x$ 등은 모두 부등식이다.

01 부등식

소단원 지도 목표

① 부등식의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.
② 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 부등식을 풀 때에는 부등식의 성질을 이용한다는 것을 강조한다. 특히 부등식의 양변에 음수를 곱하면 부등호의 방향이 바뀌는 것에 유의하도록 지도한다.

2. 복소수에서는 대소 관계를 생각 할 수 없으므로 부등식에 포함되어 있는 변수의 범위는 실수인 경우만 다룬다.

3. 절댓값을 포함한 부등식은 일차부등식의 범위에서 다룬다.

4. 절댓값 기호가 포함된 일차부등식에서는 절댓값 기호가 두 개 이하인 것만 다룬다.

생각 열기 참/고/자/료

난청은 60세 이상의 노인들에게 주로 발생하는 병이었지만 최근 잦은 이어폰 사용과 생활 소음, 약물 남용 등 청음 기관을 위협하는 환경 변화로 인하여 전 연령층으로 확산되고 있다.
난청을 막으려면 소음에 노출되는 것을 피하는 게 우선이다. 이어폰으로 꼭 음악을 들어야 한다면 50~60 dB 정도로 듣고, 가급적 하루 2시간 이상의 청취는 삼가도록 한다.
또 의식하지 못하는 사이에 소리의 크기가 더 커질 수 있으므로 소란한 곳을 피하도록 하며, 잠자리에선 사용하지 말아야 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 이 탐구 활동은 실생활 문제를 이용하여 간단한 일차부등식을 세워 봄으로써 부등식 의미를 생각해 보도록 하기 위한 것이다.

1. 중도

2. $30\leq x<50$

3. $x\geq 90$

읽/기/자/료 부등호 기호의 역사

유클리드의 “원론” 제5권에 수의 대소를 비교하는 내용은 모두 문장으로 되어 있다. 오늘날과 같은 부등호 $<$, $>$는 영국의 수학자 해리엇(Harriot, T.; 1560~1621)이 죽은 지 10년이 지난 후에 출판된 그의 저서 “해석술 연습”에 나타나 있던 것이다. 그로부터 100년이 더 지난 1734년에 출판된 부게르(Bouguer, P.; 1698~1758)의 책에서 등호와 부등호를 합친 기호인 $\geq$, $\leq$를 볼 수 있다. 그러나 이런 기호가 본격적으로 사용된 것은 1700년대 중반 이후이다.

교과서 112 쪽

부등식을 풀 때에는 다음과 같은 부등식의 기본 성질을 이용한다.

❶ 허수에 대해서는 대소 관계를 생각할 수 없으므로 부등식에 포함되는 문자는 모두 실수를 나타낸다.

부등식의 기본 성질

(1) $a>b$, $b>c$이면 $a>c$

(2) $a>b$이면 $a+c>b+c$, $a-c>b-c$

(3) $a>b$, $c>0$이면 $ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

(4) $a>b$, $c<0$이면 $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

예제 01 $a>b$, $c>d$일 때, $a+c>b+d$임을 보여라.

풀이 $a>b$이므로 $a+c>b+c$ (부등식의 기본 성질 (2))

$c>d$이므로 $b+c>b+d$ (부등식의 기본 성질 (2))

따라서 $a+c>b+d$이다. (부등식의 기본 성질 (1))

문제 1 $a>b>0$, $c>d>0$일 때, $ac>bd$임을 보여라.

예제 02 $a>b>0$일 때, $a^2>b^2$임을 보여라.

중③ 실수의 대소 관계
두 실수 a, b에 대하여 $a-b>0$이면 $a>b$이다.

풀이 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $a+b>0$

$a>b$이므로 $a-b>0$

두 양수의 곱은 양수이므로 $(a+b)(a-b)>0$, $a^2-b^2>0$

따라서 $a^2>b^2$이다.

문제 2 $a<b<0$일 때, $a^2>b^2$임을 보여라.

본문 해설

❶ 실수에는 다음과 같은 기본 성질이 성립한다.

(1) 임의의 실수 a에 대하여 다음 중 하나만 성립한다.

$a>0$, $a=0$, $a<0$

(2) 두 실수 a, b에 대하여 $a>0$, $b>0$이면

$a+b>0$, $ab>0$

복소수의 연산에 관한 성질은 대부분 실수의 경우와 유사하지만 실수와는 다르게 복소수 사이에는 대소 관계를 정의하지 않는다.

복소수 사이에서 실수처럼 위의 대소 관계 (1), (2)가 성립한다고 가정하여 보자.

그러면 허수단위 i에 대하여

$i>0$, $i=0$, $i<0$

중 하나만 성립한다.

(i) $i>0$이면 $i^2>0$이어야 한다.

이때 $i^2=-1<0$이므로 모순이다.

(ii) $i=0$이면 $i^2=0$이어야 한다.

이때 $i^2=-1<0$이므로 모순이다.

(iii) $i<0$이면 $-i>0$이므로 $(-i)^2>0$이어야 한다.

이때 $(-i)^2=-1<0$이므로 모순이다.

따라서 복소수에서는 대소 관계를 정의하지 않는다.

1

목표| 부등식의 기본 성질을 이용하여 부등식이 참임을 보일 수 있게 한다.

풀이| $a>b$이고 $c>0$이므로

$ac>bc$ (부등식의 기본 성질 (3))

$c>d$이고 $b>0$이므로

$bc>bd$ (부등식의 기본 성질 (3))

따라서 $ac>bd$이다. (부등식의 기본 성질 (1))

2

목표| 부등식의 기본 성질을 이용하여 부등식이 참임을 보일 수 있게 한다.

풀이| $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

이때 $a<0$, $b<0$이므로 $a+b<0$

$a<b$이므로 $a-b<0$

두 음수의 곱은 양수이므로

$(a+b)(a-b)>0$, $a^2-b^2>0$

따라서 $a^2>b^2$이다.

교과서 113 쪽

절댓값을 포함한 일차부등식을 어떻게 푸는가?

탐구 활동 수직선 위의 원점 O와 점 P에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 점 P의 좌표를 x라고 할 때, $\overline{OP} \leq 1$인 x값의 범위를 구하여 보자.
2. 1에서 구한 x값의 범위를 절댓값을 이용하여 나타내어 보자.

❶ 실수 x의 절댓값 $|x|$는 수직선 위에서 x를 나타내는 점과 원점 사이의 거리이다.

부등식 $|x|<2$는 수직선 위에서 x를 나타내는 점이 두 수 -2와 2 사이에 있음을 의미한다. 즉, $|x|<2$는 $-2<x<2$와 같은 의미이다.

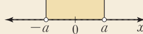
마찬가지로 $|x|>2$는 수직선 위에서 x를 나타내는 점이 -2보다 작거나 2보다 크다는 것을 의미한다. 즉, $|x|>2$는 $x<-2$ 또는 $x>2$와 같은 의미이다.

일반적으로 다음이 성립한다.

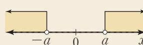
절댓값과 부등식

$a>0$일 때

(1) $|x|<a$는 '$-a<x<a$'이다.



(2) $|x|>a$는 '$x<-a$ 또는 $x>a$'이다.



예제 03 다음 부등식을 풀어라.

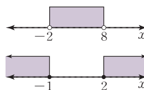
(1) $|x-3|<5$　　(2) $|2x-1| \geq 3$

풀이 (1) $|x-3|<5$이면　$-5<x-3<5$

각 변에 3을 더하면　$-2<x<8$

(2) $|2x-1| \geq 3$이면　$2x-1 \leq -3$ 또는 $2x-1 \geq 3$

$2x \leq -2$ 또는 $2x \geq 4$, $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$



답 (1) $-2<x<8$　(2) $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$

문제 3 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x-1|<2$　　(2) $|2x+1| \leq 5$

(3) $|5-2x| \geq 7$　　(4) $\left|2-\frac{x}{3}\right|>1$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 이 탐구 활동은 절댓값의 의미를 구체적인 예를 통하여 확인하기 위한 것이다.

1. 원점 O와 점 P 사이의 거리가 1보다 작거나 같아야 하므로　$\mathbf{-1 \leq x \leq 1}$

2. $\overline{OP} \leq 1$, $\overline{OP}=|x|$이므로　$\mathbf{|x| \leq 1}$

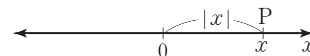
본문 해설

❶ 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 때에는 다음 절댓값의 정의를 이용하여 절댓값 안의 값이 0 이상일 때와 0 미만일 때로 나누어 푼다.

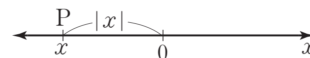
$$|a|=\begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

수직선 위에서 x를 나타내는 점을 점 P라고 할 때, $|x|$는 원점으로부터 점 P까지의 거리를 뜻한다. 즉,

$x>0$인 경우



$x<0$인 경우



3

목표| 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $|x-1|<2$에서　$-2<x-1<2$

$\mathbf{-1<x<3}$

(2) $|2x+1| \leq 5$에서　$-5 \leq 2x+1 \leq 5$

$-6 \leq 2x \leq 4$,　$\mathbf{-3 \leq x \leq 2}$

(3) $|5-2x| \geq 7$에서

$5-2x \geq 7$ 또는 $5-2x \leq -7$

$\mathbf{x \leq -1}$ **또는** $\mathbf{x \geq 6}$

(4) $\left|2-\frac{x}{3}\right|>1$에서

$2-\frac{x}{3}>1$ 또는 $2-\frac{x}{3}<-1$

$1>\frac{x}{3}$ 또는 $3<\frac{x}{3}$,　$\mathbf{x<3}$ **또는** $\mathbf{x>9}$

지/도/자/료　일차부등식의 풀이

일반적으로 일차부등식은 양변을 정리하여

$a \neq 0$일 때, $ax>b$, $ax \geq b$, $ax<b$, $ax \leq b$

와 같은 꼴로 고친 후, 양변을 x의 계수로 나눈다. 이때 계수가 음수이면 부등호가 바뀐다.

일차부등식 $ax>b$을 풀면

(ⅰ) $a>0$일 때,　$x>\frac{b}{a}$

(ⅱ) $a<0$일 때,　$x<\frac{b}{a}$

(ⅲ) $a=0$일 때, $b \geq 0$이면 해는 없다.

$b<0$이면 해는 모든 실수이다.

4

목표| 절댓값 기호 안의 부호에 따라 구간을 나누어 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $x+3$, $x-2$가 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

(i) $x<-3$일 때

$-(x+3)-(x-2)\le 7$에서

$-2x\le 8$, $x\ge -4$

그런데 $x<-3$이므로 $-4\le x<-3$

(ii) $-3\le x<2$일 때

$(x+3)-(x-2)\le 7$에서 $5\le 7$이므로 항상 성립한다.

$-3\le x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때

$(x+3)+(x-2)\le 7$에서

$2x\le 6$, $x\le 3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x\le 3$

따라서 구하는 해는 (i), (ii), (iii)에서

$\boldsymbol{-4\le x\le 3}$

(2) $x-4$, $x-1$이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

(i) $x<1$일 때

$-2(x-4)-(x-1)>9$에서 $-3x>0$, $x<0$

(ii) $1\le x<4$일 때

$-2(x-4)+(x-1)>9$에서 $x<-2$

이것을 만족시키는 해는 없다.

(iii) $x\ge 4$일 때

$2(x-4)+(x-1)>9$에서 $3x>18$, $x>6$

따라서 구하는 해는 (i), (ii), (iii)에서

$x<0$ 또는 $x>6$

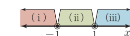
교과서 114 쪽

일반적으로 절댓값을 포함한 부등식을 풀 때에는 다음과 같이 절댓값 기호를 없애고 풀 수 있다.

$$|x-a|=\begin{cases} x-a & (x\ge a\text{일 때}) \\ -(x-a) & (x<a\text{일 때}) \end{cases}$$

예제 04 부등식 $|x-1|+|x+1|\le 6$을 풀어라.

절댓값 기호 안의 식의 부호에 따라 범위를 나눈다.



풀이 $x-1$, $x+1$이 0이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 생각한다.

(i) $x<-1$일 때

$-(x-1)-(x+1)\le 6$에서 $-2x\le 6$, $x\ge -3$

그런데 $x<-1$이므로 $-3\le x<-1$

(ii) $-1\le x<1$일 때

$-(x-1)+(x+1)\le 6$에서 $2\le 6$이므로 항상 성립한다.

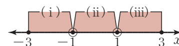
$-1\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때

$(x-1)+(x+1)\le 6$에서 $2x\le 6$, $x\le 3$

그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x\le 3$

따라서 구하는 해는 (i), (ii), (iii)에서 $-3\le x\le 3$이다.



답 $-3\le x\le 3$

문제 4 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x+3|+|x-2|\le 7$　　(2) $2|x-4|+|x-1|>9$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

오른쪽 표는 금속의 불꽃 반응에서 금속이 내놓는 빛의 파장에 따른 불꽃의 색을 나타낸 것이다. 나트륨(Na)이 불꽃 반응에서 내놓는 빛의 파장 λ nm(나노미터)에 대하여 $|\lambda-580|<10$일 때, 나트륨의 불꽃 반응은 어떤 색인지 말하여라.

파장(λ)에 따른 불꽃의 색

파장(nm)	색
$400\le\lambda<450$	보라
$450\le\lambda<500$	파랑
$500\le\lambda<570$	초록
$570\le\lambda<590$	노랑
$590\le\lambda<610$	주황
$610\le\lambda<700$	빨강

단원 과제

목표| 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.

풀이| $|\lambda-580|<10$이므로

$-10<\lambda-580<10$, $570<\lambda<590$

따라서 나트륨의 불꽃 반응 색은 **노랑**이다.

지/도/자/료

1. 절댓값을 2개 포함한 일차부등식은 다음과 같이 범위를 나누어 절댓값 기호를 정리한 후 푼다.

$|x-a|+|x-b|$ (단, $a<b$)

$$=\begin{cases} (x-a)+(x-b) & (x\ge b) \\ (x-a)-(x-b) & (a\le x<b) \\ -(x-a)-(x-b) & (x<a) \end{cases}$$

2. (i) $a>b$이면 항상 $a^2>b^2$이라고 할 수 없다. 예를 들어 $2>-3$이지만 $2^2>(-3)^2$, 즉 $4>9$는 성립하지 않는다. 따라서 a와 b가 모두 양수일 때에만 $a^2>b^2$이 성립한다.

(ii) $|a|>|b|$이면 항상 $a^2>b^2$이라고 할 수 있다. 왜냐하면 $|a|>|b|\ge 0$이기 때문이다.

교과서 115 쪽

02 이차함수와 이차부등식의 관계

● 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하고, 이차부등식과 연립이차부등식을 풀 수 있다.

이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식의 해를 어떻게 구하는가?

탐구 활동

어느 리듬 체조 선수가 마룻바닥에서 1 m 높이의 위치에서 공을 위로 던져 올릴 때, x초 후의 공의 높이를 y m라고 하면 $y=-5x^2+14x+1$의 관계가 성립한다고 하자. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 이 선수가 던진 공이 마룻바닥으로부터 9 m보다 높이 있는 시간을 구하는 부등식을 $ax^2+bx+c<0$의 꼴로 나타내어 보자.

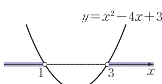
2. 1에서 구한 부등식의 a, b, c에 대하여 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그려 보자.

3. 2의 그래프에서 함숫값이 0보다 작은 x값의 범위를 그래프에 표시하여 보자.

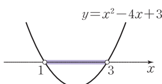
● 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하였을 때 좌변이 x에 대한 이차식으로 나타나는 부등식을 x에 대한 이차부등식이라고 한다.

이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식의 해를 구하여 보자.

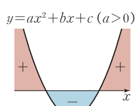
이차부등식 $x^2-4x+3>0$의 해는 이차함수 $y=x^2-4x+3$에서 $y>0$이 되도록 하는 x의 값, 즉 그래프가 x축보다 위에 있는 x값의 범위이므로 $x<1$ 또는 $x>3$이다.



한편 이차부등식 $x^2-4x+3<0$의 해는 이차함수 $y=x^2-4x+3$에서 $y<0$이 되도록 하는 x의 값, 즉 그래프가 x축보다 아래에 있는 x값의 범위이므로 $1<x<3$이다.



❶ 일반적으로 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$ $(a\neq0)$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 위에 있는 x값의 범위이고, 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축보다 아래에 있는 x값의 범위이다.



02 이차함수와 이차부등식의 관계

소단원 지도 목표

① 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하고, 이차부등식을 풀 수 있게 한다.
② 연립이차부등식을 풀 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 이차부등식에서 이차항의 계수가 음수일 때에는 양변에 -1을 곱하여 이차항의 계수가 양수가 되도록 한 다음에 풀도록 하며, -1을 곱할 때 부등호 방향이 바뀌는 것에 유의하도록 지도한다.

2. $ax^2+bx+c>0$과 같은 이차부등식의 풀이는 먼저 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 이용하여 근을 판별하도록 지도한다.

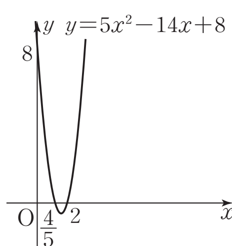
3. 연립부등식의 해는 각 부등식을 동시에 만족시키는 미지수의 공통 범위를 구하는 것임을 이해하도록 하며, 수직선을 이용하여 구하도록 지도한다.

탐구 활동의 이해

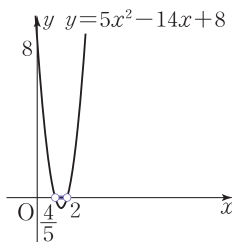
활동 목표 • 문제 상황을 이차부등식으로 나타내고, 이 이차식이 나타내는 함수의 그래프를 이용하여 부등식의 해를 구하여 봄으로써 이차함수와 이차부등식의 관계를 이해하게 하기 위한 것이다.

1. 공이 9 m보다 높이 있는 것을 나타내는 부등식을 구하면
$-5x^2+14x+1>9$
$ax^2+bx+c<0$의 꼴로 나타내기 위하여 우변의 항을 모두 좌변으로 이항하고 x^2의 계수가 양수가 되도록 -1을 곱하면
$\mathbf{5x^2-14x+8<0}$

2. 1에서 구한 부등식에서
$a=5$, $b=-14$, $c=8$
따라서 이차함수
$y=5x^2-14x+8$
$=(5x-4)(x-2)$
의 그래프를 그리면 오른쪽과 같다.



3. 함숫값이 0보다 작은 경우는 그래프가 x축보다 아래에 있을 때이므로 이때의 x값의 범위는 오른쪽과 같다.



본문 해설

❶ 일반적으로 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위에 있도록 하는 x값의 범위이다.
따라서 부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해는 두 그래프 $y=ax^2+bx+c$와 $y=0$(x축)에 대하여 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 $y=0$의 그래프인 x축보다 위에 있는 x값의 범위이다.

본문 해설

❶ $a>0$일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$을 가지면 이차함수 $y=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$의 그래프의 모양은 주어진 그래프와 같다. 따라서 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$, 즉 $a(x-\alpha)(x-\beta)>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$이고 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$, 즉 $a(x-\alpha)(x-\beta)<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$이다.

❷ 이차부등식은 모든 항을 좌변으로 이항하여 x에 대한 내림차순으로 정리한 후 x^2의 계수가 양수가 아닌 경우에는 양수로 고쳐서 푸는 것이 쉽다.

교과서 116 쪽

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a>0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라고 할 때, 이차함수의 그래프와 이차부등식의 해 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

❶ 이차함수의 그래프와 이차부등식의 해 ($a>0$인 경우)

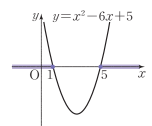
판별식의 부호	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$의 그래프			
$ax^2+bx+c>0$의 해	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$x\neq\alpha$인 모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c\geq0$의 해	$x\leq\alpha$ 또는 $x\geq\beta$	모든 실수	모든 실수
$ax^2+bx+c<0$의 해	$\alpha<x<\beta$	없다.	없다.
$ax^2+bx+c\leq0$의 해	$\alpha\leq x\leq\beta$	$x=\alpha$	없다.

❷ 참고 $a<0$인 경우에는 주어진 부등식의 양변에 -1을 곱하여 부등식을 변형한 다음 푼다. 이때 부등호의 방향이 바뀌는 것에 주의한다.

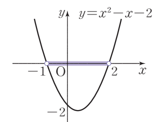
예제 01 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2-6x+5\geq0$ (2) $-x^2+x+2>0$

풀이 (1) 이차함수 $y=x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이차부등식 $x^2-6x+5\geq0$의 해는 오른쪽 그림에서 그래프가 x축보다 위에 있거나 x축과 만나는 x값의 범위이다. 따라서 구하는 해는 $x\leq1$ 또는 $x\geq5$이다.



(2) 양변에 -1을 곱하면 $x^2-x-2<0$
이차함수 $y=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이차부등식 $x^2-x-2<0$의 해는 오른쪽 그림에서 그래프가 x축보다 아래에 있는 x값의 범위이다.
따라서 구하는 해는 $-1<x<2$이다.



답 (1) $x\leq1$ 또는 $x\geq5$ (2) $-1<x<2$

지/도/자/료

주어진 이차식이 AB의 꼴로 인수분해될 때, 다음을 이용하여 부등식을 풀 수도 있다.

$AB>0$이면

$\begin{cases}A>0\\B>0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}A<0\\B<0\end{cases}$

$AB<0$이면

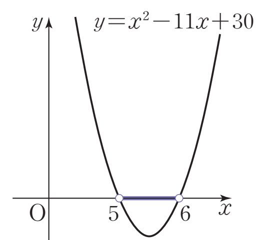
$\begin{cases}A>0\\B<0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}A<0\\B>0\end{cases}$

그러나 이차함수와 이차부등식의 관계를 충분히 이해할 수 있도록 그래프를 이용하여 이차부등식을 풀게 하는 것이 바람직하다.

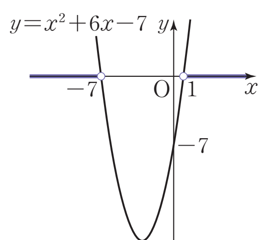
1

목표| $D>0$일 때, 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) 이차함수
$y=x^2-11x+30$
$=(x-5)(x-6)$
의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이차부등식 $x^2-11x+30<0$의 해는
$5<x<6$



(2) 양변에 -1을 곱하면
$x^2+6x-7>0$
이차함수
$y=x^2+6x-7$
$=(x+7)(x-1)$
의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는 **$x<-7$ 또는 $x>1$**

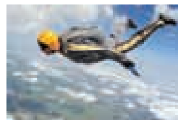


문제 1 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2-11x+30<0$ (2) $-x^2-6x+7<0$

(3) $-2x^2+7x+4\geq0$ (4) $x^2-4x+1\geq0$

문제 2 지상으로부터 1008 m 높이의 비행기에서 낙하한 사람의 t초 후의 높이는 $(1008-2t-5t^2)$m라고 하자. 이 사람이 지상으로부터 적어도 488 m 이상에서 낙하산을 펴야 한다면, 낙하하기 시작한 후 몇 초 안에 낙하산을 펴야 하는지 구하여라.



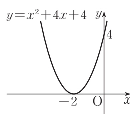
예제 02 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2+4x+4<0$ (2) $-x^2+10x-25<0$

풀이 (1) 이차함수 $y=x^2+4x+4=(x+2)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이차부등식 $x^2+4x+4<0$의 해는 오른쪽 그림에서 그래프가 x축보다 아래에 있는 x값의 범위이다.

따라서 구하는 해는 없다.

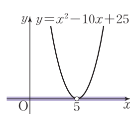


(2) 양변에 -1을 곱하면 $x^2-10x+25>0$

이차함수 $y=x^2-10x+25=(x-5)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이차부등식 $x^2-10x+25>0$의 해는 오른쪽 그림에서 그래프가 x축보다 위에 있는 x값의 범위이다.

따라서 구하는 해는 $x\neq5$인 모든 실수이다.



답 (1) 해는 없다. (2) $x\neq5$인 모든 실수

문제 3 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2+2x+1>0$ (2) $x^2-6x+9<0$

(3) $16x^2-8x+1\geq0$ (4) $-4x^2+12x-9\geq0$

(3) 양변에 -1을 곱하면

$2x^2-7x-4\leq0$

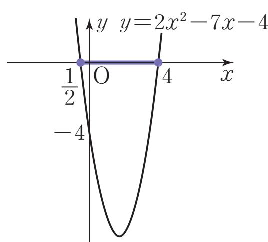
이차함수

$y=2x^2-7x-4$

$=(2x+1)(x-4)$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는

$-\frac{1}{2}\leq x\leq4$



(4) 이차함수

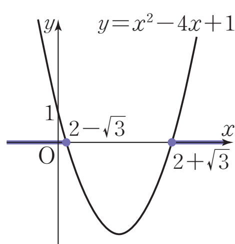
$y=x^2-4x+1$

$=\{x-(2-\sqrt{3})\}$

$\times\{x-(2+\sqrt{3})\}$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는

$x\leq2-\sqrt{3}$ 또는 $x\geq2+\sqrt{3}$



2

목표| 이차함수의 그래프와 이차부등식의 해의 관계를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $1008-2t-5t^2\geq488$에서

$5t^2+2t-520\leq0$, $(5t+52)(t-10)\leq0$

$-\frac{52}{5}\leq t\leq10$

따라서 **10초** 안에 낙하산을 펴야 한다.

3

목표| $D=0$일 때, 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식을 풀 수 있게 한다.

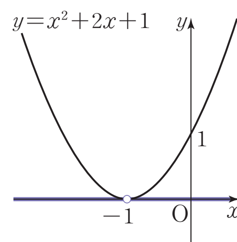
(1) 이차함수

$y=x^2+2x+1$

$=(x+1)^2$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는

$x\neq-1$인 모든 실수이다.

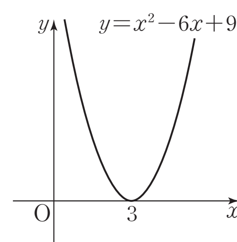


(2) 이차함수

$y=x^2-6x+9$

$=(x-3)^2$

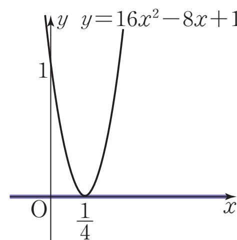
의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 **해는 없다.**



(3) 이차함수

$y=16x^2-8x+1$

$=(4x-1)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 해는 **모든 실수이다.**



(4) 양변에 -1을 곱하면

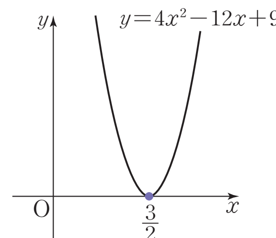
$4x^2-12x+9\leq0$

이차함수

$y=4x^2-12x+9$

$=(2x-3)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

구하는 해는 $x=\frac{3}{2}$이다.



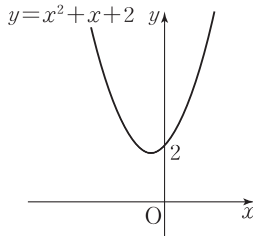
4

목표| $D<0$일 때, 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) 이차방정식 $x^2+x+2=0$에서

$D=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$

이므로 이차함수 $y=x^2+x+2$의 그래프는 다음 그림과 같다.



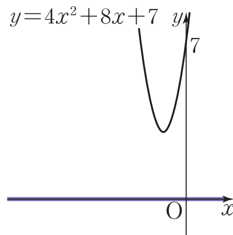
따라서 구하는 **해는 없다.**

(2) 양변에 -1을 곱하면 $4x^2+8x+7\ge0$

이차방정식 $4x^2+8x+7=0$에서

$\frac{D}{4}=4^2-4\cdot7=-12<0$

이므로 이차함수 $y=4x^2+8x+7$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 해는 **모든 실수**이다.

교과서 118 쪽

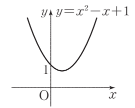
예제 03 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2-x+1<0$ (2) $-x^2-4x-5\le0$

풀이 (1) 이차방정식 $x^2-x+1=0$에서

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$이므로 이차함수 $y=x^2-x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이차부등식 $x^2-x+1<0$의 해는 없다.

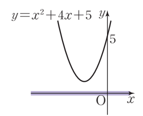


(2) 양변에 -1을 곱하면 $x^2+4x+5\ge0$

이차방정식 $x^2+4x+5=0$에서 $\frac{D}{4}=2^2-1\cdot5=-1<0$

이므로 이차함수 $y=x^2+4x+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이차부등식 $x^2+4x+5\ge0$의 해는 모든 실수이므로 이차부등식 $-x^2-4x-5\le0$의 해는 모든 실수이다.



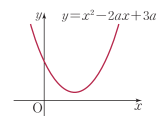
답 (1) 해는 없다. (2) 모든 실수

문제 4 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2+x+2<0$ (2) $-4x^2-8x-7\le0$

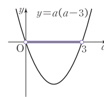
예제 04 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2-2ax+3a>0$이 성립하도록 하는 실수 a값의 범위를 구하여라.

풀이 이차함수 $y=x^2-2ax+3a$가 모든 실수 x에 대하여 $y>0$이 항상 성립해야 하므로 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다. 즉, 이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$에서 판별식 $D<0$이어야 한다.



$\frac{D}{4}=a^2-3a<0$에서 $a(a-3)<0$

따라서 구하는 a값의 범위는 $0<a<3$이다.



답 $0<a<3$

문제 5 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $-2x^2-mx+m<0$이 성립하도록 하는 실수 m값의 범위를 구하여라.

5

목표| 이차부등식의 해가 모든 실수일 때, 이차부등식의 계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $-2x^2-mx+m<0$에서 $2x^2+mx-m>0$이므로 이차함수 $y=2x^2+mx-m$의 그래프가 모든 실수 x에 대하여 x축보다 위에 있어야 한다. 즉, x축과 만나지 않아야 하므로 이차방정식 $2x^2+mx-m=0$의 판별식 $D<0$이어야 한다.

$D=m^2+8m<0$에서 $m(m+8)<0$

$\boldsymbol{-8<m<0}$

지/도/자/료

모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\ne0$이 성립할 조건은 다음과 같다.

(i) $a=0$인 경우 $b=0$, $c\ne0$

(ii) $a>0$인 경우 모든 실수에 대하여 $ax^2+bx+c>0$이어야 하므로 $D=b^2-4ac<0$

(iii) $a<0$인 경우 모든 실수에 대하여 $ax^2+bx+c<0$이어야 하므로 $D=b^2-4ac<0$

6

목표| 이차부등식을 이용하여 이차함수의 그래프가 직선보다 아래쪽에 있는 x값의 범위를 구할 수 있게 한다.

풀이| 이차함수 $y=x^2-4x+1$의 함숫값이 직선 $y=2x+8$보다 작은 x값의 범위를 구하면 된다.

$x^2-4x+1<2x+8$에서

$x^2-6x-7<0$, $(x+1)(x-7)<0$

따라서 구하는 x값의 범위는 $\boldsymbol{-1<x<7}$이다.

교과서 119 쪽

예제 05 이차함수 $y=x^2-4x+4$의 그래프가 직선 $y=x-2$보다 위쪽에 있는 x값의 범위를 구하여라.

풀이 이차함수 $y=x^2-4x+4$의 함숫값이 직선 $y=x-2$의 함숫값보다 큰 x값의 범위를 구하면 된다.

$x^2-4x+4>x-2$에서 $x^2-5x+6>0$, $(x-2)(x-3)>0$

따라서 구하는 x값의 범위는 $x<2$ 또는 $x>3$이다.

답 $x<2$ 또는 $x>3$

문제 6 이차함수 $y=x^2-4x+1$의 그래프가 직선 $y=2x+8$보다 아래쪽에 있는 x값의 범위를 구하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▸문제 해결

이차부등식 $ax^2+bx+c<0$ $(a\neq0)$이 모든 실수 x에 대하여 성립하기 위한 실수 a, b, c의 조건을 구하여 보자.

연립이차부등식을 어떻게 푸는가?

탐구 활동

어느 회사에서 인터넷 배너 광고를 하기 위하여 직사각형 모양의 광고 창을 만들려고 한다. 이 광고 창의 둘레의 길이는 20 cm로 하고, 넓이를 21 cm^2 이상이 되도록 가로의 길이를 정하려고 한다. 가로의 길이를 세로의 길이보다 짧게 만든다고 할 때, 가로의 길이를 x cm라고 하면 다음 두 부등식을 얻을 수 있다. 물음에 답하여 보자.

$$\begin{cases} 0<x<10-x & \cdots\cdots ① \\ x(10-x)\geq 21 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

1. 부등식 ①을 만족시키는 x값의 범위를 수직선 위에 나타내어 보자.
2. 부등식 ②를 만족시키는 x값의 범위를 수직선 위에 나타내어 보자.
3. ①과 ②에서 얻은 범위의 공통부분을 말하여 보자.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 부등식 ①과 ②를 동시에 만족시키는 x의 범위의 공통부분을 조사함으로써 연립이차부등식을 푸는 기본 원리를 알아보기 위한 것이다.

1. $0<x<10-x$에서 $0<x$, $x<10-x$

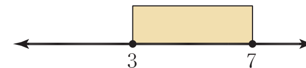
$0<x$, $2x<10$

$0<x<5$

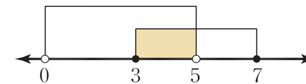
2. $x(10-x)\geq21$에서 $10x-x^2\geq21$

$x^2-10x+21\leq0$, $(x-3)(x-7)\leq0$

$3\leq x\leq7$



3. $3\leq x<5$



사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 이차부등식의 해가 모든 실수일 때, 이차부등식의 계수의 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이| $a>0$이면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 포물선의 축의 왼쪽에서 감소하고, 오른쪽에서 증가한다. 따라서 반드시 x축보다 위에 위치하는 그래프의 부분이 있으므로 $a<0$이다.

$a<0$일 때, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 포물선의 축의 왼쪽에서 증가하고, 오른쪽에서 감소하므로 그래프가 모든 실수 x에 대하여 x축보다 아래쪽에 있기 위해서는 $D=b^2-4ac<0$이어야 한다.

그러므로 $\boldsymbol{a<0}$, $\boldsymbol{D=b^2-4ac<0}$이다.

지/도/자/료

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립하면 $a>0$, $D=b^2-4ac<0$

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq0$이 성립하면 $a>0$, $D=b^2-4ac\leq0$

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 성립하면 $a<0$, $D=b^2-4ac<0$

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c\leq0$이 성립하면 $a<0$, $D=b^2-4ac\leq0$

교과서 120 쪽

연립부등식을 이루고 있는 부등식 중에서 차수가 가장 높은 부등식이 이차부등식일 때, 이 연립부등식을 연립이차부등식이라고 한다.

연립이차부등식을 풀 때에는 중학교에서 배운 연립일차부등식을 풀 때와 마찬가지로 각 부등식의 해를 구한 후 이들의 공통부분을 구한다.

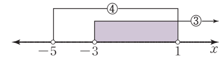
예제 06 다음 연립이차부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x+5>x+2 & \cdots\cdots ① \\ x^2+4x-5<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-5x+6\geq 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-3x-4<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

연립이차부등식에서 각 부등식의 해의 공통부분을 구할 때, 수직선을 이용하면 편리하다.

풀이 (1) ①을 풀면 $x>-3$ ...... ③

②를 풀면 $(x+5)(x-1)<0$, $-5<x<1$ ...... ④

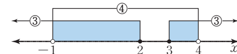


따라서 구하는 해는 ③, ④를 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로

$-3<x<1$

(2) ①을 풀면 $(x-2)(x-3)\geq 0$, $x\leq 2$ 또는 $x\geq 3$ ...... ③

②를 풀면 $(x+1)(x-4)<0$, $-1<x<4$ ...... ④



따라서 구하는 해는 ③, ④를 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로

$-1<x\leq 2$ 또는 $3\leq x<4$

답 (1) $-3<x<1$ (2) $-1<x\leq 2$ 또는 $3\leq x<4$

문제 7 다음 연립이차부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x-1>0 \\ x^2-3x-4<0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ x^2\leq x+20 \end{cases}$

(3) $2(x-3)<x(x-3)\leq x$ (4) $2x+5<x^2<7x+8$

❶ $A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 와 같다.

발전 **문제 8** 두 이차방정식

$$x^2+2(1+a)x+3+a=0,\ x^2+ax+a=0$$

이 모두 허근을 가질 때, 실수 a값의 범위를 구하여라.

본문 해설

❶ 부등식 $A<B<C$를 풀 때,

$\begin{cases} A<B \\ A<C \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A<C \\ B<C \end{cases}$

와 같이 풀지 않도록 한다.

7

목표| 연립이차부등식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) 첫 번째 부등식을 풀면 $x>\frac{1}{2}$ ⋯①

두 번째 부등식을 풀면 $-1<x<4$ ⋯②

따라서 구하는 해는 ①, ②를 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로

$\mathbf{\frac{1}{2}<x<4}$

(2) 첫 번째 부등식을 풀면 $(x+2)(x-2)\geq 0$

$x\leq -2$ 또는 $x\geq 2$ ...... ①

두 번째 부등식을 풀면 $(x+4)(x-5)\leq 0$

$-4\leq x\leq 5$ ...... ②

따라서 구하는 해는 ①, ②를 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로

$-4\leq x\leq -2$ 또는 $2\leq x\leq 5$

(3) 주어진 부등식은 다음 연립부등식과 같다.

$\begin{cases} 2(x-3)<x(x-3) & \cdots\cdots ① \\ x(x-3)\leq x & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 풀면 $x<2$ 또는 $x>3$ ...... ③

②를 풀면 $0\leq x\leq 4$ ...... ④

따라서 구하는 해는 ③, ④를 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로 **$0\leq x<2$ 또는 $3<x\leq 4$**

(4) 주어진 부등식은 다음 연립부등식과 같다.

$\begin{cases} 2x+5<x^2 & \cdots\cdots ① \\ x^2<7x+8 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 풀면 $x<1-\sqrt{6}$ 또는 $x>1+\sqrt{6}$ ...... ③

②를 풀면 $-1<x<8$ ...... ④

따라서 구하는 해는 ③, ④를 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로 $\mathbf{1+\sqrt{6}<x<8}$

8

목표| 연립이차부등식을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $x^2+2(1+a)x+3+a=0$, $x^2+ax+a=0$의 판별식을 구하면 각각 다음과 같다.

$\frac{D_1}{4}=(1+a)^2-1\cdot(3+a)=a^2+a-2$

$D_2=a^2-4\cdot 1\cdot a=a^2-4a$

두 이차방정식이 모두 허근을 가지는 a값의 범위는 다음 연립이차부등식의 근과 같다.

$\begin{cases} a^2+a-2<0 & \cdots\cdots ① \\ a^2-4a<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 풀면 $-2<a<1$ ...... ③

②를 풀면 $0<a<4$ ...... ④

이므로 ③, ④를 동시에 만족시키는 a값의 범위 $\mathbf{0<a<1}$이 구하는 실수 a값의 범위이다.

교과서 121 쪽

중단원 기초

[해답 p.224]

수준별 학습

1 오른쪽 부등식의 풀이에서 쓰인 부등식의 기본 성질을 보기에서 찾아라.

보기
ㄱ. $a>b$, $b>c$이면 $a>c$
ㄴ. $a>b$이면 $a+c>b+c$
ㄷ. $a>b$, $c>0$이면 $ac>bc$
ㄹ. $a>b$, $c<0$이면 $ac<bc$

$1-3x<\frac{1}{2}x+8$ → (1)
$2-6x<x+16$ → (2)
$-7x<14$ → (3)
$x>-2$

01 부등식
부등식의 기본 성질

2 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x+3|\geq 5$　　(2) $|1-2x|<7$
(3) $\frac{|3x+1|}{2}\leq 1$　　(4) $\left|1-\frac{1}{2}x\right|>3$

01 부등식
절댓값을 포함한 일차부등식

3 이차함수의 그래프를 이용하여 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2-x-12\leq 0$　　(2) $-x^2-3x+10<0$
(3) $x^2-8x+16\leq 0$　　(4) $x^2+2x+5>0$

02 이차함수와 이차부등식의 관계
이차부등식

4 다음 연립이차부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x-6\geq 0 \\ x^2-6x+8<0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x-5\geq x-7 \\ x^2-4x+3>0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+2x-15\leq 0 \\ x^2-x-2\geq 0 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x^2-3x+2\geq 0 \\ x^2+x-6<0 \end{cases}$

02 이차함수와 이차부등식의 관계
연립이차부등식

중/단/원 기초

1

목표| 부등식의 기본 성질을 이해하게 한다.

풀이| (1) ㄷ　　(2) ㄴ　　(3) ㄹ

2

목표| 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $x+3\leq -5$ 또는 $x+3\geq 5$이므로
$x\leq -8$ 또는 $x\geq 2$

(2) $-7<1-2x<7$이므로　**$-3<x<4$**

(3) $|3x+1|\leq 2$, $-2\leq 3x+1\leq 2$이므로　**$-1\leq x\leq \frac{1}{3}$**

(4) $1-\frac{1}{2}x<-3$ 또는 $1-\frac{1}{2}x>3$이므로
$x<-4$ 또는 $x>8$

3

목표| 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $(x+3)(x-4)\leq 0$이므로
$-3\leq x\leq 4$

(2) $x^2+3x-10>0$, $(x+5)(x-2)>0$
이므로　**$x<-5$ 또는 $x>2$**

(3) $(x-4)^2\leq 0$이므로　**$x=4$**

(4) $\frac{D}{4}=1^2-1\cdot 5=-4<0$이므로 해는 모든 실수이다.

4

목표| 연립이차부등식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $\begin{cases} 2x-6\geq 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-6x+8<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 풀면　$x\geq 3$　……③
②를 풀면　$2<x<4$　……④
따라서 구하는 해는 ③, ④를 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로　**$3\leq x<4$**

(2) $\begin{cases} 3x-5\geq x-7 & \cdots\cdots ① \\ x^2-4x+3>0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 풀면　$x\geq -1$　……③
②를 풀면　$x<1$ 또는 $x>3$　……④
따라서 구하는 해는 ③, ④를 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로　**$-1\leq x<1$ 또는 $x>3$**

(3) $\begin{cases} x^2+2x-15\leq 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-x-2\geq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 풀면　$-5\leq x\leq 3$　……③
②를 풀면　$x\leq -1$ 또는 $x\geq 2$　……④
따라서 구하는 해는 ③, ④를 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로　**$-5\leq x\leq -1$ 또는 $2\leq x\leq 3$**

(4) $\begin{cases} x^2-3x+2\geq 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+x-6<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 풀면　$x\leq 1$ 또는 $x\geq 2$　……③
②를 풀면　$-3<x<2$　……④
따라서 구하는 해는 ③, ④를 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로　**$-3<x\leq 1$**

중/단/원 기본

교과서 122 쪽

중단원 **기본** [해답 p.224] 수준별 학습

1 부등식 $(a-b)x<a+2b$의 해가 $x<3$일 때, 부등식 $ax>2b$를 풀어라.

01 부등식 / 부등식의 기본 성질

2 부등식 $3|x|+|x-2|>4$를 풀어라.

01 부등식 / 절댓값을 포함한 일차부등식

3 이차부등식 $x^2-2kx-k>0$의 해가 모든 실수가 되도록 하는 실수 k값의 범위를 구하여라.

02 이차함수와 이차부등식의 관계 / 이차부등식

4 다음 연립이차부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x^2-7x+3\ge 0 \\ x^2-8x+12<0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2\ge 4 \\ x^2+4x-5<0 \end{cases}$

(3) $x-1<3\le 4x^2-x$ (4) $x-2\le x^2-2x<x+4$

02 이차함수와 이차부등식의 관계 / 연립이차부등식

5 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2-3x+a>0 \\ x^2+bx-8\le 0 \end{cases}$의 해가 $-2\le x<1$ 또는 $2<x\le 4$라고 할 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

02 이차함수와 이차부등식의 관계 / 연립이차부등식

1

목표| 부등식의 기본 성질을 이용하여 부등식을 풀 수 있게 한다.

풀이| $a-b>0$, $\dfrac{a+2b}{a-b}=3$이므로

$a+2b=3a-3b$에서 $b=\dfrac{2}{5}a$

$a-b=a-\dfrac{2}{5}a=\dfrac{3}{5}a>0$이므로 $a>0$

따라서 $ax>2b$에서

$x>\dfrac{2b}{a}=\dfrac{4}{5}$, $\boldsymbol{x>\dfrac{4}{5}}$

2

목표| 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.

풀이| $x<0$, $0\le x<2$, $x\ge 2$인 경우로 나누어 풀면 구하는 해는 $\boldsymbol{x<-\dfrac{1}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{x>1}$

3

목표| 이차부등식의 해가 모든 실수일 때, 이차부등식의 계수의 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(-k)<0$에서

$k(k+1)<0$이므로 $\boldsymbol{-1<k<0}$

4

목표| 연립이차부등식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) 첫 번째 부등식을 풀면 $x\le\dfrac{1}{2}$ 또는 $x\ge 3$

두 번째 부등식을 풀면 $2<x<6$

구하는 해는 두 부등식을 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로 $\boldsymbol{3\le x<6}$

(2) 첫 번째 부등식을 풀면 $x\le -2$ 또는 $x\ge 2$

두 번째 부등식을 풀면 $-5<x<1$

구하는 해는 두 부등식을 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로 $\boldsymbol{-5<x\le -2}$

(3) $x-1<3$을 풀면 $x<4$

$3\le 4x^2-x$를 풀면 $x\le -\dfrac{3}{4}$ 또는 $x\ge 1$

구하는 해는 두 부등식을 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로 $\boldsymbol{x\le -\dfrac{3}{4}}$ **또는** $\boldsymbol{1\le x<4}$

(4) $x-2\le x^2-2x$를 풀면 $x\le 1$ 또는 $x\ge 2$

$x^2-2x<x+4$를 풀면 $-1<x<4$

구하는 해는 두 부등식을 동시에 만족시키는 x값의 범위이므로 $\boldsymbol{-1<x\le 1}$ **또는** $\boldsymbol{2\le x<4}$

5

목표| 연립이차부등식의 해를 이용하여 부등식의 계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\begin{cases} x^2-3x+a>0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+bx-8\le 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

의 해가 $-2\le x<1$ 또는 $2<x\le 4$이므로 ①의 해는 $x<1$ 또는 $x>2$이고, ②의 해는 $-2\le x\le 4$이다.

①에서 $x^2-3x+a=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$

②에서 $x^2+bx-8=(x+2)(x-4)=x^2-2x-8$

따라서 $\boldsymbol{a=2,\ b=-2}$이다.

중단원 실력

[해답 p.224]

수준별 학습

1 $a<x<b$, $c<y<d$일 때, 다음 중에서 항상 옳은 것을 모두 찾고, 그렇지 않은 것은 예를 들어 설명하여라.

(1) $a+c<x+y<b+d$
(2) $a-d<x-y<b-c$
(3) $ac<xy<bd$

01 부등식 — 부등식의 기본 성질

2 부등식 $|x|+|x+1|\le a$의 해가 $-\frac{3}{2}\le x\le b$일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

01 부등식 — 절댓값을 포함한 일차부등식

3 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2-5x-6<0 \\ x^2-3x-10>0 \end{cases}$의 임의의 해가 이차부등식 $x^2-a^2<0$을 만족시킬 때, 실수 a값의 범위를 구하여라.

02 이차함수와 이차부등식의 관계 — 연립이차부등식

4 세 변의 길이가 x, $x+1$, $x+2$인 삼각형이 둔각삼각형이 되도록 하는 자연수 x의 개수를 구하여라.

02 이차함수와 이차부등식의 관계 — 연립이차부등식

5 이차부등식 $x^2-5x+4\ge0$과 $x^2+(a-3)x-3a<0$을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 한 개만 존재할 때, 실수 a값의 범위를 구하여라.

02 이차함수와 이차부등식의 관계 — 연립이차부등식

중/단/원 실력

1

목표| 부등식의 기본 성질을 이해하게 한다.

풀이| 항상 옳은 것은 (1), (2)이다.

(3) $a=-3$, $b=-1$, $c=2$, $d=10$이라고 하면 $ac=-6>-10=bd$이므로 $ac<xy<bd$는 성립하지 않는다.

2

목표| 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.

풀이| 주어진 부등식을 풀면

$-\frac{a+1}{2}\le x<-1$ 또는 $0\le x\le\frac{a-1}{2}$

$-\frac{a+1}{2}=-\frac{3}{2}$, $\frac{a-1}{2}=b$에서 $\boldsymbol{a=2,\ b=\frac{1}{2}}$

3

목표| 연립이차부등식을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 연립이차부등식의 해는

$5<x<6$

$x^2-a^2<0$의 해는 $a>0$일 때 $-a<x<a$,

$a<0$일 때 $a<x<-a$

(i) $a>0$일 때 $a\ge6$

(ii) $a<0$일 때 $a\le-6$

따라서 구하는 a값의 범위는

$\boldsymbol{a\le-6}$ **또는** $\boldsymbol{a\ge6}$

4

목표| 연립이차부등식을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 삼각형에서 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작으므로

$x+2<x+(x+1)$에서 $x>1$ …… ①

둔각삼각형에서 가장 긴 변의 길이의 제곱은 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합보다 크므로

$(x+2)^2>x^2+(x+1)^2$에서

$-1<x<3$ …… ②

①, ②를 동시에 만족시키는 x값의 범위는 $1<x<3$이므로 구하는 자연수 x는 2로 **1**개이다.

5

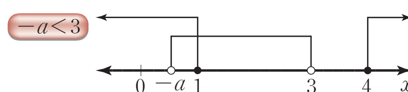
목표| 연립이차부등식을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $x^2-5x+4\ge0$의 해는 $x\le1$ 또는 $x\ge4$

$x^2+(a-3)x-3a<0$의 해는 $(x+a)(x-3)<0$에서

$-a<3$일 때 $-a<x<3$, $-a>3$일 때 $3<x<-a$

두 이차부등식을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 한 개 존재하므로 두 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 실수 a값의 범위는

$\boldsymbol{-1<a\le0}$ **또는** $\boldsymbol{-5\le a<-4}$

교과서 124 쪽

수행 과제

자동차의 정지거리

교통사고를 예방하기 위해서는 운전자의 안전거리 확보가 중요한데, 안전거리란 앞차가 갑자기 정지하더라도 부딪치지 않도록 유지해야 하는 앞차와의 거리를 말한다.

그럼 안전거리는 얼마나 확보해야 할까?

운전자가 멈춰야 한다는 판단을 한 순간부터 브레이크 페달을 밟은 뒤 자동차가 완전히 정지할 때까지 자동차가 움직인 거리를 정지거리라고 하는데, 안전거리는 정지거리 이상으로 유지해야 한다.

정지거리에 영향을 주는 요인으로는 운전자의 주의력, 반응 속도, 자동차의 무게, 브레이크의 성능, 도로의 상태 등이 있으며, 속력이 빠르면 정지거리는 길어진다.

어떤 고속 국도에서 시속 x km로 달리는 자동차의 정지거리 y m는

$$y=\frac{1}{100}x^2+\frac{3}{50}x$$

라고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

STO

| 과 제 | 1 이 고속 국도에서 시속 80 km로 달리는 자동차가 확보해야 하는 최소 안전거리를 구하여라.

| 과 제 | 2 이 고속 국도에서 유지해야 하는 안전거리의 규정이 100 m 이상으로 주어졌을 때, 규정을 준수하면서 달릴 수 있는 최대 속력은 약 몇 km/h인지 구하여라.

교과서 125 쪽

대단원 학습 내용 정리

1 복소수

복소수

(1) 허수단위: 제곱하여 -1이 되는 수, $i=\sqrt{-1}$

(2) 복소수: $a+bi$ (a, b는 실수)의 꼴로 나타나는 수

$a+bi$ (허수부분: b, 실수부분: a)

(3) 허수: 실수가 아닌 복소수

(4) 복소수 $a+bi$의 켤레복소수는 $\overline{a+bi}=a-bi$

복소수의 사칙계산

a, b, c, d가 실수일 때

(1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(3) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ (단, $c+di\neq0$)

2 이차방정식

이차방정식의 근의 판별

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 판별식 $D=b^2-4ac$에 대하여

(1) $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 가진다.
또 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이다.

(2) $D=0$이면 중근(실근)을 가진다.
또 중근을 가지면 $D=0$이다.

(3) $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 가진다.
또 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 두 근을 α, β라고 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

3 이차방정식과 이차함수

이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식을 D라고 할 때

(1) $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
또 서로 다른 두 점에서 만나면 $D>0$이다.

(2) $D=0$이면 한 점에서 만난다(접한다).
또 한 점에서 만나면(접하면) $D=0$이다.

(3) $D<0$이면 만나지 않는다.
또 만나지 않으면 $D<0$이다.

4 여러 가지 부등식

절댓값과 부등식

$a>0$일 때

(1) $|x|<a$는 '$-a<x<a$' 이다.

(2) $|x|>a$는 '$x<-a$ 또는 $x>a$' 이다.

이차부등식의 해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라고 할 때, 다음이 성립한다.

D의 부호	$y=ax^2+bx+c$	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c<0$
$D>0$	+ − + α β x	$x<\alpha$ 또는 $x>\beta$	$\alpha<x<\beta$
$D=0$	+ + $\alpha=\beta$ x	$x\neq\alpha$인 모든 실수	해가 없다.
$D<0$	+ + x	모든 실수	해가 없다.

| 용어와 기호 | 허수단위, 복소수, 실수부분, 허수부분, 허수, 켤레복소수, 실근, 허근, 판별식, i, $a+bi$, $\overline{a+bi}$

수행 과제

● **수행 과제 의도**

이차함수로 나타낼 수 있는 실생활 소재를 이용하여 이차부등식을 활용해 보도록 하기 위한 것이다.

과제 1 _풀이

어떤 고속 국도에서 시속 x km로 달리는 자동차의 정지거리 y m는 $y=\frac{1}{100}x^2+\frac{3}{50}x$이므로

$x=80$을 대입하면 이 고속 국도에서의 정지거리는

$\frac{1}{100}\times80^2+\frac{3}{50}\times80=64+4.8=68.8$(m)

이다.

안전거리는 정지거리 이상이므로 최소 안전거리는 **68.8 m**이다.

과제 2 _풀이

안전거리가 100 m 이상이어야 하는 규정을 준수하면서 달릴 수 있는 자동차의 속력을 구하려면 정지거리 y m가 100 m 이하가 되는 x값의 범위를 구하면 된다. 단, 속력은 0보다 크기 때문에 $x>0$이다.

$\frac{1}{100}x^2+\frac{3}{50}x\leq100$, $x^2+6x\leq10000$

$x^2+6x-10000\leq0$

이차방정식 $x^2+6x-10000=0$의 근은

$x=-3\pm\sqrt{10009}$이므로

이차함수 $y=x^2+6x-10000$의 그래프에 의하여 이차부등식 $x^2+6x-10000\leq0$ $(x>0)$의 근은

$0<x\leq-3+\sqrt{10009}$

따라서 이 고속 국도에서 규정을 준수하면서 달릴 수 있는 최대 속력은 $-3+\sqrt{10009}$ km/h이다.

이를 계산기를 이용하여 계산하면 약 **97 km/h**이다.

교과서 126 쪽

대/단/원 평가 문제

선택형

1 $(3+i)\bar{z}+2iz=7+9i$를 만족시키는 복소수 $z=x+yi$ (x, y는 실수)에 대하여 xy의 값은?
(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

2 다음 중에서 허근을 가지는 이차방정식은?

① $x^2+4x-3=0$ ② $4x^2-6x+1=0$
③ $x^2+2x+3=0$ ④ $x^2+2x-7=0$
⑤ $5x^2-4=0$

3 이차방정식 $x^2-3x+5=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, α^2, β^2을 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2-x+25=0$
② $x^2+x+25=0$
③ $x^2-19x+25=0$
④ $x^2+19x+25=0$
⑤ $x^2+19x-25=0$

4 이차함수 $y=x^2-2ax+6$의 최솟값이 2가 되도록 하는 상수 a값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

5 이차함수 $f(x)=x^2-4x+a$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 6일 때, $f(x)$의 최솟값은?

① -10 ② -9 ③ -8
④ -7 ⑤ -6

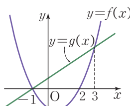
6 삼차방정식 $x^3-px+6=0$의 한 근이 -2이다. 이 방정식의 나머지 두 근을 α, β라고 할 때, $p+\alpha+\beta$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

7 연립일차방정식 $\begin{cases} x-2y+z=8 \\ 3x+2y+2z=7 \\ 2x-y-2z=6 \end{cases}$의 해를 $x=a$, $y=b$, $z=c$라고 할 때, $a-b+c$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

8 이차함수 $y=f(x)$와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 부등식 $f(x)>g(x)$와 같은 해를 가지고, x^2의 계수가 1인 이차부등식을 $x^2+ax+b>0$이라고 하자. 이때 두 상수 a, b의 값을 차례로 적으면?



① 2, 3 ② -2, 3 ③ -2, -3
④ 3, 2 ⑤ -3, 2

대/단/원 평가 문제

1

목표| 켤레복소수의 의미와 복소수가 서로 같을 조건을 이해하게 한다.

풀이| $\bar{z}=x-yi$이므로

$(3+i)\bar{z}+2iz=(3+i)(x-yi)+2i(x+yi)$

$=(3x-y)+(3x-3y)i=7+9i$

따라서 $3x-y=7$, $3x-3y=9$를 연립하여 풀면

$x=2$, $y=-1$이므로 $xy=2\cdot(-1)=-2$ **답** ①

2

목표| 판별식을 이용하여 주어진 이차방정식의 근을 판별할 수 있게 한다.

풀이| ③ $\dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot3=-2<0$

따라서 허근을 가지는 이차방정식은 ③이다. **답** ③

3

목표| 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $x^2-3x+5=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=5$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2\cdot5=-1$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=5^2=25$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0$, $x^2+x+25=0$

답 ②

4

목표| x값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수의 최댓값 또는 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 이차함수 $y=x^2-2ax+6$의 최솟값이 2이므로

$y=x^2-2ax+6=(x-a)^2-a^2+6$ 에서

$-a^2+6=2$, $a^2=4$이므로 $a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 상수 a값의 합은 $-2+2=0$

답 ③

5

목표| 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, $\alpha+6$이라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+6)=4$, $\alpha=-1$

$\alpha(\alpha+6)=a$, $a=-5$

따라서 $f(x)=x^2-4x-5=(x-2)^2-9$이므로 최솟값은 -9이다.

답 ②

6

목표| 삼차방정식의 한 근이 주어졌을 때, 나머지 두 근과 계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^3-px+6=0$의 한 근이 -2이므로

$-8+2p+6=0$, $p=1$

$x^3-x+6=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x+2)(x^2-2x+3)=0$

α, β는 방정식 $x^2-2x+3=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$

따라서 $p+\alpha+\beta$의 값은 $1+2=3$이다. **답** ③

7

목표| 연립일차방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| $\begin{cases} x-2y+z=8 & \cdots\cdots ① \\ 3x+2y+2z=7 & \cdots\cdots ② \\ 2x-y-2z=6 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

①+②에서 $4x+3z=15$ ……④

②+③×2에서 $7x-2z=19$ ……⑤

④, ⑤를 연립하여 풀면 $x=3$, $z=1$ …⑥

⑥을 ①에 대입하면 $3-2y+1=8$, $y=-2$

따라서 $a=3$, $b=-2$, $c=1$이므로

$a-b+c=3-(-2)+1=6$ **답** ⑤

8

목표| 이차부등식의 해가 주어져 있을 때, 이차부등식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 그래프에서 $f(x)>g(x)$의 해는

$x<-1$ 또는 $x>3$

$x<-1$ 또는 $x>3$을 해로 가지고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은 $(x+1)(x-3)>0$이므로

$x^2+ax+b=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$

따라서 $a=-2$, $b=-3$이다. **답** ③

교과서 127 쪽

[해답 p.225]

9 부등식 $|2x-3|<1$의 해가 $a<x<b$라고 할 때, $x^2-bx+a\le0$의 해는?

① 해는 없다. ② $x=1$
③ $x\le1$ ④ $x\ne1$인 모든 실수
⑤ 모든 실수

10 이차부등식 $ax^2-4(a-1)x+3a\ge0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

11 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2+ax-b\le0 \\ x^2+bx+2a>0 \end{cases}$의 해가 $1<x\le3$일 때, 실수 a, b에 대하여 $b-a$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0
④ 5 ⑤ 10

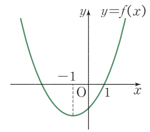
서답형

12 $a=(1+i)^n$이 양의 실수가 되도록 하는 최소의 자연수 n의 값과 그때의 a의 값에 대하여 $n+a$의 값을 구하여라.

13 이차함수 $y=x^2-2x+3$의 그래프가 직선 $y=mx-1$의 위쪽에 있을 때, 실수 m값의 범위를 구하여라.

14 내접원의 반지름의 길이가 2인 직각삼각형이 있다. 이 삼각형의 둘레의 길이가 24일 때, 세 변의 길이를 구하여라.

15 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 점 $(1,\ 0)$을 지나고 꼭짓점의 x좌표가 $x=-1$일 때, 다음을 구하여라.



(1) 방정식 $f(x)=0$의 해
(2) 부등식 $f(x)<0$의 해

|서|술|형|

16 삼차방정식 $x^3-3x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\sqrt{2}i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

17 이차방정식 $x^2-ax+1=0$은 실근을 가지고, $x^2+(a-1)x+1=0$은 허근을 가질 때, 실수 a값의 범위를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

9

목표| 이차부등식과 절댓값이 있는 일차부등식을 풀 수 있게 한다.

풀이| $|2x-3|<1$에서 $-1<2x-3<1$, $1<x<2$

이므로 $a=1$, $b=2$

$x^2-bx+a\le0$에서 $x^2-bx+a=x^2-2x+1=(x-1)^2$

$(x-1)^2\le0$의 해는 $x=1$ **답** ②

10

목표| 이차부등식의 해가 모든 실수일 때, 이차부등식의 계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $a>0$, $\dfrac{D}{4}=\{-2(a-1)\}^2-a\cdot3a=a^2-8a+4\le0$

$4-2\sqrt{3}\le a\le4+2\sqrt{3}$

따라서 구하는 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개이다.

답 ④

11

목표| 연립이차부등식을 풀 수 있게 한다.

풀이| $x=3$은 $x^2+ax-b=0$의 근이고,

$x=1$은 $x^2+bx+2a=0$의 근이므로 이 근을 각 방정식에 대입하면

$\begin{cases} 9+3a-b=0 \\ 1+b+2a=0 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $a=-2$, $b=3$이므로 $b-a=5$

답 ④

12

목표| 복소수의 곱셈과 i^n의 성질을 이해하게 한다.

풀이| $(1+i)^2=2i$, $(1+i)^4=-4$, $(1+i)^8=16$

따라서 a가 양의 실수가 되도록 하는 최소의 자연수는 $n=8$이고 그때의 a의 값은 16이다.

$n+a=8+16=24$ **답** 24

13

목표| 이차부등식을 이용하여 이차함수의 그래프가 직선보다 위쪽에 있을 때 계수의 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2-2x+3>mx-1$, 즉 $x^2-(2+m)x+4>0$의 해는 모든 실수이므로 $D=\{-(m+2)\}^2-4\cdot1\cdot4<0$

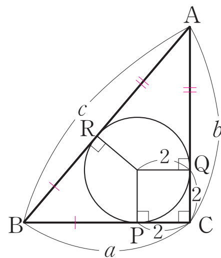
$(m+6)(m-2)<0$, $-6<m<2$

답 $-6<m<2$

14

목표| 연립이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 a, b, c라고 하면



$\overline{AB}=\overline{AR}+\overline{BR}=\overline{AQ}+\overline{BP}$

이므로 $c=(b-2)+(a-2)$

$a+b-c=4$ …… ①

또 삼각형의 둘레의 길이에서

$a+b+c=24$ …… ②

①+②에서 $2a+2b=28$, $a+b=14$

②−①에서 $2c=20$, $c=10$

그런데 $a^2+b^2=c^2$이므로 $a^2+(14-a)^2=100$

$2a^2-28a+96=0$, $(a-6)(a-8)=0$

$\begin{cases}a=6\\b=8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a=8\\b=6\end{cases}$

따라서 삼각형의 세 변의 길이는 6, 8, 10이다.

답 6, 8, 10

15

목표| 이차함수의 그래프와 이차방정식, 이차부등식의 관계를 이해하게 한다.

풀이| $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 α, 1이라고 하면 포물선의 축이 $x=-1$이므로

$\frac{\alpha+1}{2}=-1$, $\alpha=-3$

(1) 방정식 $f(x)=0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표이므로 $x=-3$ 또는 $x=1$

(2) 부등식 $f(x)<0$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 x축보다 아래에 있는 x값의 범위이므로 $-3<x<1$

답 (1) $x=-3$ 또는 $x=1$
(2) $-3<x<1$

16

목표| 삼차방정식의 한 허근을 알 때, 계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 방정식에 $x=\sqrt{2}i$를 대입하면

$(\sqrt{2}i)^3-3(\sqrt{2}i)^2+a(\sqrt{2}i)+b=0$

$-2\sqrt{2}i+6+a\sqrt{2}i+b=0$

$6+b+(-2\sqrt{2}+a\sqrt{2})i=0$

a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$6+b=0$, $-2\sqrt{2}+a\sqrt{2}=0$에서 $a=2$, $b=-6$

답 $a=2$, $b=-6$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	주어진 방정식에 $x=\sqrt{2}i$를 대입하기	20%
	$x=\sqrt{2}i$를 대입한 식을 실수부분, 허수부분으로 나누기	30%
	복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 연립방정식 만들기	30%
답 구하기	상수 a, b 구하기	20%

17

목표| 이차방정식이 실근 또는 허근을 가질 조건을 연립이차부등식으로 표현하고 풀 수 있게 한다.

풀이| $x^2-ax+1=0$이 실근을 가지므로

$D_1=a^2-4\ge0$, $(a+2)(a-2)\ge0$

$a\le-2$ 또는 $a\ge2$ …… ①

$x^2+(a-1)x+1=0$이 허근을 가지므로

$D_2=(a-1)^2-4<0$, $a^2-2a-3<0$

$(a+1)(a-3)<0$

$-1<a<3$ …… ②

①과 ②를 동시에 만족시켜야 하므로 구하는 실수 a값의 범위는 $2\le a<3$

답 $2\le a<3$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	$x^2+ax+1=0$의 판별식 D_1에 대하여 $D_1\ge0$인 식 세우기	20%
	부등식 $D_1\ge0$ 풀기	20%
	$x^2+(a-1)x+1=0$의 판별식 D_2에 대하여 $D_2<0$인 식 세우기	20%
	부등식 $D_2<0$ 풀기	20%
답 구하기	실수 a값의 범위 구하기	20%

M+ History

수 학 ✚ 역 사

삼차방정식은 누가 처음 풀었을까?

삼차방정식의 대수적 해법을 최초로 발견한 사람은 1515년 이탈리아 볼로냐 대학의 수학 교수였던 페로(Ferro, S. ; 1465~1526)이다. 그는 그 결과를 자신의 제자이자 사위인 피어에게만 알려 주고 죽었다.

1535년경에 타르탈리아(Tartaglia, N. F. ; 1499~1557)가 삼차방정식의 대수적 해법을 발견하였다고 주장하자, 피어는 타르탈리아에게 방정식의 풀이에 관한 시합을 제안하였다. 결국 이 시합에서 타르탈리아가 승리하여 명성을 얻게 되었지만 그는 끝까지 그 해법을 발표하지 않았다.

타르탈리아

삼차방정식의 해법을 알고 싶어 하던 카르다노(Cardano, G. ; 1501~1576)가 타르탈리아에게 삼차방정식의 해법을 알려 주면 비밀도 지키고 좋은 후원자를 소개시켜 주겠다고 제안하였다. 결국 타르탈리아는 카르다노에게 삼차방정식의 해법을 알려 주었고, 카르다노는 이것을 자기의 업적인 양 그의 책 “위대한 술법”을 통하여 발표해 버렸다. 타르탈리아는 언어 장애가 있었기 때문에 오히려 표절자로 몰렸고, 그 때문에 삼차방정식의 해법은 ‘카르다노의 공식’이라고 불리게 되었다.

카르다노

그러나 오늘날 이 모든 것이 밝혀지면서 삼차방정식의 대수적 해법에 관한 공적은 카르다노와 타르탈리아에게 동시에 돌리고 있다.

스마트폰으로 교점의 좌표를 구하여 보자.

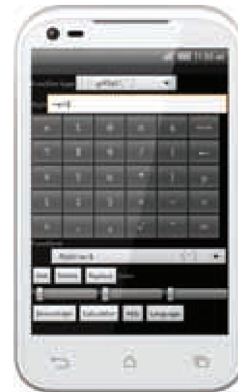
스마트폰의 애플리케이션을 활용하면 함수의 그래프에 대한 다양한 학습 활동과 흥미 있는 경험을 할 수 있다. 적절한 애플리케이션을 이용하여 두 함수의 그래프의 교점의 좌표를 구하여 보자.

1 \ 두 함수 $y=-x-1$, $y=x^2-2x-3$의 그래프를 하나의 좌표평면 위에 그려 보자.

❶ 함수 $y=-x-1$의 그래프를 그리기 위하여 초기 화면의 '$f(x)=$' 옆에 '$-x-1$'을 입력하고 OK, Add 를 차례로 누른다.

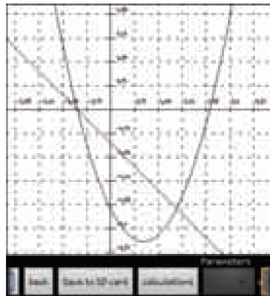
❷ 함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프를 그리기 위하여 '$f(x)=$' 옆에 '$x^2-2*x-3$'을 입력하고 OK, Add 를 차례로 누른다.

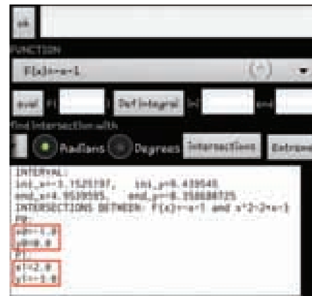
❸ Show Graph 를 누르면 두 그래프가 하나의 좌표평면에 위에 그려진다.



2 \ 두 함수 $y=-x-1$, $y=x^2-2x-3$의 그래프의 교점의 좌표를 구하여 보자.

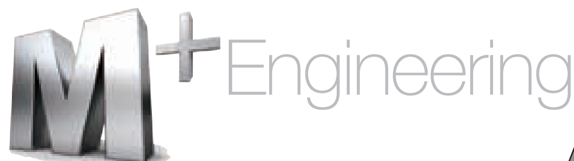
위의 그림에서 Calculator 를 누르거나 다음 왼쪽 그림에서 calculations 를 누른 뒤 intersections 를 누르면 교점의 좌표는 오른쪽 그림에서 $(-1,\ 0)$, $(2,\ -3)$임을 알 수 있다.





3 \ 두 함수 $y=x+1$, $y=x^2-2x+1$의 그래프의 교점의 좌표를 구하여 보자.

수 학 ➕ 공 학



우리가 사는 세상에서는 다양한 형태의 도형을 볼 수 있다.

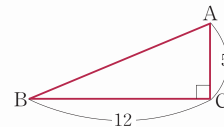
도형의 방정식

Ⅲ

| 준 | 비 | 학 | 습 |

중③ 피타고라스 정리

1 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 선분 AB의 길이를 구하여라. 13



수학 I 연립이차방정식

2 다음 연립이차방정식을 풀어라.

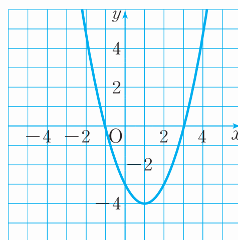
(1) $\begin{cases} y=x+1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y=-x-2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$

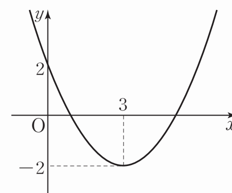
중③ 이차함수의 그래프

3 다음 물음에 답하여라.

(1) 이차함수 $y=x^2-2x-3$의 그래프를 다음 좌표평면 위에 그려라.



(2) 그래프가 다음 그림과 같은 이차함수의 식을 구하여라. $y=\frac{4}{9}(x-3)^2-2$



단원의 지도 목표

1. 평면좌표

① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

② 선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

2. 직선의 방정식

① 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

② 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해하게 한다.

③ 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

3. 원의 방정식

① 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

② 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해하게 한다.

4. 도형의 이동

① 평행이동의 의미를 이해하게 한다.

② 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있게 한다.

5. 부등식의 영역

① 부등식의 영역의 의미를 이해하게 한다.

② 부등식의 영역을 활용하여 최대, 최소 문제를 해결할 수 있게 한다.

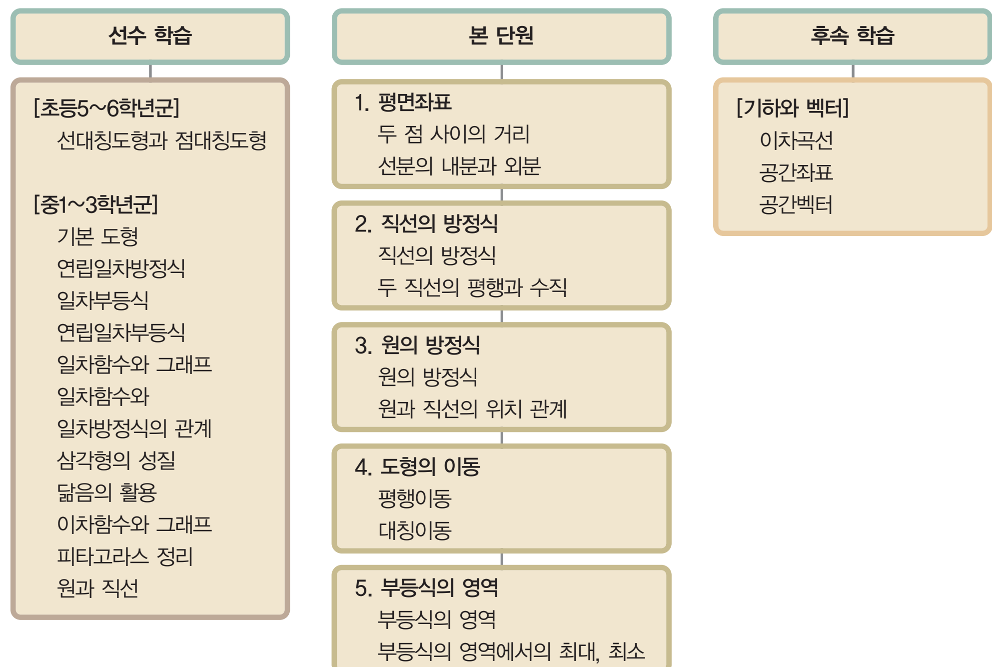
교수 · 학습상의 유의점

① 좌표축의 평행이동은 다루지 않는다.

② 부등식의 영역의 활용에서는 간단한 소재를 택하여 다룬다.

③ 내분점, 외분점, 원의 방정식 용어는 교수 · 학습 상황에서 다루어질 수 있다.

교수 · 학습의 계열



단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1	130~131	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 평면좌표	중단원 도입		132	• 위도와 경도	
	01 두 점 사이의 거리		133~135	• 두 점 사이의 거리	
	02 선분의 내분과 외분	2~5	136~142	• 수직선 위에서 선분을 내분하는 점과 외분하는 점 • 좌표평면 위에서 선분을 내분하는 점과 외분하는 점	내분, 외분
	수준별 학습	6	143~145	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 직선의 방정식	중단원 도입	7~9	146	• 지구는 점점 뜨거워지고 있다.	
	01 직선의 방정식		147~150	• 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식 • 두 점을 지나는 직선의 방정식	
	02 두 직선의 평행과 수직	10~13	151~158	• 두 직선이 평행하기 위한 조건 • 두 직선이 수직이기 위한 조건 • 점과 직선 사이의 거리	
	수준별 학습	14	159~161	• 중단원 확인 학습 문제	
3. 원의 방정식	중단원 도입	15~17	162	• 산업용 로봇이 인간을 대신한다.	
	01 원의 방정식		163~166	• 원의 방정식	
	02 원과 직선의 위치 관계	18~19	167~172	• 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계 • 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식 • 한 점을 지나는 원의 접선의 방정식	
	수준별 학습	20	173~175	• 중단원 확인 학습 문제	
4. 도형의 이동	중단원 도입	21~22	176	• 당구에도 수학이?	
	01 평행이동		177~180	• 평행이동한 점의 좌표 • 평행이동한 도형의 방정식	$f(x,\ y)=0$
	02 대칭이동	23~25	181~186	• 대칭이동한 점의 좌표 • 대칭이동한 도형의 방정식	대칭이동
	수준별 학습	26	187~189	• 중단원 확인 학습 문제	
5. 부등식의 영역	중단원 도입	27~29	190	• 야구장의 내야와 외야	
	01 부등식의 영역		191~197	• 부등식의 영역 • 원의 내부와 외부 • 연립부등식의 영역	
	02 부등식의 영역에서의 최대, 최소	30~31	198~200	• 부등식의 영역에서 최댓값과 최솟값	
	수준별 학습	32	201~203	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		33~34	204~209	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 기하학의 시작과 쇠퇴

도형을 연구하는 수학의 분야를 기하학이라 하고, 기하학을 뜻하는 geometry는 땅을 뜻하는 'geo'와 측량을 뜻하는 'metry'가 합쳐진 것이다.

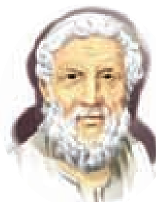
그리스의 역사학자 헤로도토스는 그의 저서에서 '기하학은 토지를 측량하는 기술로서 이집트에서 나일 강의 범람으로 해마다 경작지의 경계선을 정리해야 했기 때문에 사용되었다.'고 서술하고 있다. 사실 기원전 2500년경의 고대 이집트의 피라미드 건설과 같은 대형 토목 공사는 기하학적 지식 수준이 상당했음을 보여 주고 있고, 아메스(Ahmes ; ?B.C. 1680~?B.C. 1620)의 파피루스에는 정사각형, 직사각형, 이등변삼각형, 등변사다리꼴의 넓이와 각뿔, 닮은 도형에 관한 내용이 들어 있다. 이러한 이집트 인들의 기하학적 지식은 후에 그리스 인들에 의하여 학문적인 체계를 갖추게 되었다. 그리스 인들은 기하학적 지식을 이집트로부터, 산술적 지식을 페니키아로부터 도입하였으나 실용성을 제거하고 이론적이고 기하학적인 엄밀한 수학으로 발전시켰다.

또 다른 고대 문명인, 이를테면 바빌로니아 인, 인도인, 중국인 등도 기하학에 대한 많은 지식을 가졌던 것으로 확인되었다. 그러나 기록이 많이 남아 있지 않기 때문에 이집트와 그리스의 기하학보다는 덜 알려지게 되었다.

탈레스

그리스에서 논리적 추론에 의한 기하학은 탈레스(Thales ; ?B.C. 624~?B.C. 546)에 의하여 시작되었다. 탈레스에 의한 기하학의 논리화는 피타고라스와 그의 제자들에 의하여 계승되었으며, 기원전 400년경의 수학자 히포크라테스(Hippocrates ; ?B.C. 460~?B.C. 377)에 의하여 책으로 정리되었다. 그 후 이 내용은 유클리드(Euclid ; ?B.C. 325~?B.C. 265)에 의하여 "원론"으로 집대성되었다. 이 책은 서양 사상사에서 가장 영향력이 큰 고전 가운데 하나로 고대, 중세를 거쳐 19세기 근대에 이르기까지 기하학 교과서로서는 물론 과학적 사고방식의 규범이 되었다. 유클리드는 증명에서 되도록 직관적인 요소를 배제하고 증명을 순수한 사유의 영역에서 다루려는 자세를 취했다. 그리스 초기의 기하학에서는 증명이 다분히 직관적이고 논증의 형식이 충분히 갖추어지지 않았지만, 이것을 엄격한 논증 형식으로 바꾼 것은 피타고라스학파의 업적으로 여겨진다.

피타고라스와 그의 학파에서는 논증기하학을 발전시켜 그 유명한 피타고라스 정리를 증명하였으며 이차방정식의 기하학적 해법, 정다면체의 이론 등을 논증하였다. 이들의 독특한 방법은 기하학과 산술과의 접촉을 시도한 것이었다.


아폴로니오스

그러나 그리스의 수학은 아폴로니오스(Apollonios ; ?B.C. 262~?B.C. 190) 이후 쇠퇴의 길을 밟기 시작하여 원뿔곡선에 대한 연구는 아폴로니오스 이후 데카르트(Descartes, R. ; 1596~1650)까지 그 상태 그대로 정지하였다. 또 평면곡선에 대한 연구도 이따금 있었을 뿐 체계적인 연구는 이루어지지 않았다.

르네상스 이후의 유럽에서는 아라비아의 영향을 받은 대수학이 발달하였고, 17세기 이후에는 해석학의 발전이 현저했으므로 기하학은 대수학 및 해석학과 대립하는 처지가 되었다.

2. 해석기하학과 종합기하학

데카르트는 수와 도형 사이에는 밀접한 관계가 있어

서 공간에 좌표를 도입하여 도형을 방정식으로 나타내고, 또 역으로 방정식을 도형으로 표현할 수 있다고 하였다. 이와 같이 좌표에 의하여 도형의 문제를 방정식 문제로 바꾸고 대수적 계산에 의하여 기하학의 문제를 해결하는 기하학을 해석기하학이라고 한다.

데카르트의 사상은 17세기의 해석학의 발전에 기여하였으며, 해석기하학은 18세기경에 오일러(Euler, L. ; 1707～1783), 몽주(Monge, G. ; 1746～1818) 등에 의하여 많은 발전을 이루었다.

그러나 모든 기하학의 문제에 대하여 해석기하학의 방법을 쓰는 것이 가장 적당하다고 할 수 없으므로 좌표를 쓰지 않고 도형을 직접 고찰하는 분야인 종합기하학이 생겼다.

이 방면의 새로운 방법으로서 17세기부터 데자르그(Desargues, G. ; 1591～1661), 파스칼(Pascal, B. ; 1623～1662) 등에 의한 사영기하학이 등장하였고, 18세기 이후로 몽주, 카르노(Carnot, L. N. M. ; 1753～1823), 퐁슬레(Poncelet, J. V. ; 1788～1867) 등에 의하여 발전하였다.

3. 비유클리드 기하학

유클리드의 평행선 공리는 옛날부터 비판적 연구의 대상이 되어 왔으나, 19세기에 와서 그것을 부정한 로바쳅스키(Lobachevskii, N. I. ; 1792～1856), 보여이(Bolyai, J. ; 1802～1860) 등에 의하여 비유클리드 기하학이 생겨났는데, 유클리드 기하학에 비하여 매우 기이하게 여겨졌다. 그러나 비유클리드 기하학의 성립은 논리적으로 아무런 모순도 포함하지 않는다는 것이 유클리드 기하학 또는 사영기하학에서 그 모형을 만들 수 있게 됨으로써 밝혀졌다.

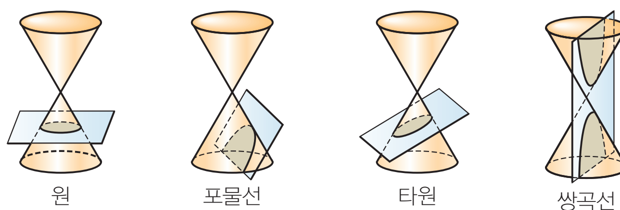
기하학을 다시 다른 방향으로 발전시키는 획기적인 단서는 리만(Riemann, G. F. B. ; 1826～1866)에 의하여 이루어졌다. 그는 당시 해석학의 최대 난제였던 무리식의 부정적분을 구하는 문제를 기하학적으로 해결하였는데, 그때 사용한 도형을 리만곡면이라고 한다. 리만곡면에 대한 연구는 훗날 복소기하학과 리만기하학으로 발전하였다.

1871년 클라인(Klein, F. C. ; 1849～1925)은 로바쳅스키와 보여이의 기하학을 쌍곡기하학, 유클리드 기하학을 포물기하학, 리만기하학을 타원기하학이라고 명명하였다.

일반적으로 원, 포물선, 타원, 쌍곡선의 방정식은 모두 x, y에 대한 이차방정식

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

의 특수한 경우이다. 만일 이 방정식의 좌변이 두 일차식의 곱으로 나타나면 이 이차방정식은 두 직선을 나타낸다. 이와 같이 x, y에 대한 이차방정식이 나타나는 곡선을 통틀어 이차곡선이라고 하는데, 이들 이차곡선은 다음 그림과 같이 원뿔을 한 평면으로 자를 때 자르는 각도에 따라 그 단면에 나타나는 곡선이 되므로 이들을 원뿔곡선이라고도 한다. 클라인은 쌍곡기하학, 포물기하학 등의 명칭을 이런 원뿔곡선에서부터 도입하였다.



한편 유클리드의 “원론”의 공리계는 힐베르트(Hilbert, D. ; 1862～1943)가 재음미하여 공리론적 기하학을 제시하였는데, 이는 현대 수학의 모든 분야에서 공리주의적 경향으로서의 선구가 되었다.

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원	Ⅲ. 도형의 방정식	쪽수	교과서 130~135쪽
소단원	1. 평면좌표 01 두 점 사이의 거리	차시	1/34
학습 목표	두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	중학교에서 다루었던 두 점 사이의 거리 및 절댓값의 의미에 대하여 복습한다. 중단원 도입 글을 읽고 단원 과제를 발문하여 이번 중단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다. 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. 학습 내용 설명 **수직선 위의 두 점 사이의 거리** 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는 $\overline{\mathrm{AB}}=\|b-a\|$ **좌표평면 위의 두 점 사이의 거리** 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 특히 원점 O와 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ 예제 01, 02를 설명한다. 문제 1, 2, 3, 4번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다. 단원 과제를 해결하도록 한다. 단원 과제의 해결 과정을 발표하게 하고, 보충 설명을 한다.	두 점 사이의 거리를 이용하여 삼각형의 종류를 판별하는 문제에서 직각삼각형인 경우 이등변삼각형인지를 확인해야함을 유의시킨다.
정리	학습 내용 정리 차시 예고	본시의 학습 내용을 정리한다. 다음 차시를 예고한다. • 수직선 위에서 선분을 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원	Ⅲ. 도형의 방정식	쪽수	교과서 136~138쪽
소단원	1. **평면좌표** 01 두 점 사이의 거리	차시	2/34
학습 목표	**수직선 위에서 선분을 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.**		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	**선수 학습 확인** **동기 유발** **학습 목표 제시**	◐ 비례식의 성질을 간단히 확인, 점검한다. ◐ 136쪽의 탐구 활동에 대하여 양팔저울에서 선분의 길의 비에 대하여 살펴본다. ◐ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 수직선 위에서 선분을 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	**탐구 활동** **개념 학습** **문제 해결**	◐ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. ◐ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◐ 학습 내용 설명 **내분** 선분 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}} = m : n\ (m>0,\ n>0)$ 일 때, 점 P는 선분 AB를 $m : n$으로 내분한다고 한다. **수직선 위의 선분을 내분하는 점의 좌표** 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$ 특히 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\mathrm{M}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ ◐ 예제 01을 설명한다. ◐ 문제 1번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	
정리	**학습 내용 정리** **차시 예고**	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 수직선 위에서 선분을 외분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	

1 평면좌표

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

② 선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

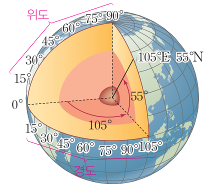
소단원명	지도 내용
01 두 점 사이의 거리	두 점 사이의 거리
02 선분의 내분과 외분	수직선 위에서 선분을 내분하는 점과 외분하는 점
	좌표평면 위에서 선분을 내분하는 점과 외분하는 점
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 132 쪽

1 평면좌표

위도와 경도

일상생활에서 어떤 위치를 말할 때 흔히 주소를 사용한다. 하지만 깊은 산속이나 드넓은 바다 또는 사막 한가운데에 있을 때, 자신의 위치를 어떻게 말하면 좋을까? 바로 이때 필요한 것이 좌표이다. 좌표는 지구 상 어디든 그 위치를 알파벳, 숫자, 기호 등을 통해 표현할 수 있는 일종의 전 지구 주소 체계라고 할 수 있다.



전 세계에서 사용되는 좌표계 중 경위도 좌표계는 위도와 경도로써 그 위치를 표현한다. 위도란 지구 중심에서 적도 방향을 기준으로 남북 방향의 각도로 특정 위치를 표현한 것이며, 적도를 기준으로 북쪽 지역은 북위(N), 남쪽 지역은 남위(S)라고 한다. 경도란 지구 중심에서 영국의 그리니치 천문대 방향을 기준으로 동서 방향의 각도로 특정 위치를 표현한 것이며, 그리니치 천문대를 기준으로 동쪽 지역은 동경(E), 서쪽 지역은 서경(W)이라고 한다. 일정 각도 간격의 위도선들은 전 세계 어디서나 폭이 대체로 비슷하지만, 경도선들은 적도에서 폭이 가장 넓고 북극점과 남극점에 가까울수록 그 폭이 좁아진다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 135 쪽

위도와 경도를 이용하여 두 지점 사이의 거리를 구할 수 있을까?

들어가면서 복잡한 도심 한가운데에서 누군가에게 길을 가르쳐 주려고 할 때, 우리는 대부분 현재의 위치나 쉽게 알아볼 수 있는 건물 등을 중심으로 설명을 하게 된다. 마찬가지로 좌표평면 위에서 원점을 중심으로 좌표를 정하면 모든 점의 위치를 좌표로 나타낼 수 있다.

일상생활에서 두 지점 사이의 거리를 측정하는 일은 가장 기본적이면서도 중요한데, 두 지점을 좌표평면 위에 올려놓으면 두 지점 사이의 거리를 쉽게 구할 수 있다.

이 단원에서는 좌표를 이용하여 두 점 사이의 거리, 두 점을 연결한 선분을 내분하는 점과 외분하는 점의 좌표를 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.	상	수직선과 좌표평면 위에서 두 점 사이의 거리를 구하는 과정을 이해하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	좌표평면 위의 임의의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	하	수직선 위에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
2. 선분의 내분을 이해하고, 내분점의 좌표를 구할 수 있다.	상	좌표평면 위의 선분의 내분점의 좌표를 구할 수 있다.
	중	수직선 위의 선분의 내분점의 좌표를 구할 수 있다.
	하	선분의 내분의 뜻을 말할 수 있다.
3. 선분의 외분을 이해하고, 외분점의 좌표를 구할 수 있다.	상	좌표평면 위의 선분의 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
	중	수직선 위의 선분의 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
	하	선분의 외분의 뜻을 말할 수 있다.

교과서 133 쪽

01 두 점 사이의 거리

● 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

두 점 사이의 거리를 어떻게 구하는가?

생각 열기 지도

지도는 지표의 일부 또는 전체를 축소시켜 각종 기호와 문자를 사용하여 평면에 그림으로 표현한 것을 말한다. 본격적으로 지도가 제작되기 시작한 것은 중세 후반 지중해를 중심으로 상업과 해상 활동이 활기를 띠면서부터이다. 이와 더불어 중국에서 나침반이 발명되고, 항해술, 조선술이 발달하면서 지도 제작에 새로운 전환기를 가져왔다. 또한 인쇄술이 발달하면서 대량 생산이 가능해져 지도책이 출간되기 시작하였다.

탐구 활동 다음은 1 km 간격으로 평행선을 그어서 거리를 나타낸 어느 지역의 지도이다. 이 지도를 보고 물음에 답하여 보자.

1. 학교와 서점, 서점과 주유소 사이의 직선거리를 각각 구하여 보자.
2. 피타고라스 정리를 이용하여 학교와 주유소 사이의 직선거리를 구하여 보자.
3. 학교의 위치를 원점 $(0,\ 0)$, 서점의 위치를 $(3,\ 0)$이라고 할 때, 주유소, 편의점, 약국의 위치를 나타내는 좌표를 각각 구하여 보자.

중① 수직선 위의 한 점 A에 실수 a가 대응될 때, a를 점 A의 좌표라고 하며, 이것을 기호로 $\mathrm{A}(a)$와 같이 나타낸다.

● $|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0\text{일 때}) \\ -a & (a<0\text{일 때}) \end{cases}$

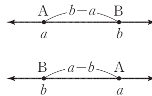
수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는

$a\leq b$일 때 $\overline{\mathrm{AB}}=b-a$

$a>b$일 때 $\overline{\mathrm{AB}}=a-b$

이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\overline{\mathrm{AB}}=|b-a|$$



생각 열기 참/고/자/료

지도는 등고선을 이용하여 땅의 높낮이를 나타내고 수계, 교통로, 취락, 토지 이용, 지명 등을 표시한 지도인 지형도가 일반적으로 많이 사용된다. 이외에도 이용하려는 목적에 따라 도시계획지도, 지질도, 토양도, 산림도, 교통도, 산업분포도 등이 있다.

우리나라의 측량 및 지도 제작 관련 업무를 총괄하는 국토지리정보원 홈페이지 (http://www.ngii.go.kr)를 방문하면 측지와 지도, 국토에 대한 다양한 정보를 얻을 수 있다.

01 두 점 사이의 거리

소단원 지도 목표

① 수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.
② 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.
③ 두 점 사이의 거리 공식을 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

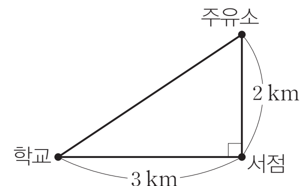
1. 수직선 위의 두 점 사이의 거리는 두 점의 위치에 따라 두 가지 경우로 나누어지므로 이를 절댓값을 이용하여 나타냄을 알게 한다.
2. 피타고라스 정리를 먼저 복습한 다음 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 유도하도록 한다.
3. 공식이 유도되는 과정을 이해하여 두 점 사이의 거리를 구할 수 있도록 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 주어진 지도 위의 두 지점 사이의 직선거리를 피타고라스 정리를 이용하여 구하는 과정에서 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 발견하는 토대가 되도록 한다.

1. 학교와 서점 사이의 직선거리는 **3 km**
서점과 주유소 사이의 직선거리는 **2 km**

2. 지도 위에서 학교, 서점, 주유소의 세 지점을 연결하면 오른쪽과 같은 직각삼각형 모양이 된다.



피타고라스 정리에 의하여 학교와 주유소 사이의 직선거리는
$\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ **(km)**

3. 주유소의 위치는 **(3, 2)**
편의점의 위치는 **(0, 1)**
약국의 위치는 **(2, 1)**

1

목표| 수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overline{AB}=|1-(-3)|=\mathbf{4}$

(2) $\overline{OP}=|6-0|=\mathbf{6}$

주의| 수직선 위의 두 점 사이의 거리는 두 점을 양 끝 점으로 하는 선분의 길이와 같으며 절댓값의 개념이므로 음수가 될 수 없다.

교과서 134 쪽

문제 1 다음 수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구하여라.

(1) $A(-3)$, $B(1)$ (2) $O(0)$, $P(6)$

이제 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리를 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 각각 x축, y축에 평행하게 그은 두 직선의 교점을 C라고 하면 삼각형 ABC는 직각삼각형이고, 점 C의 좌표는 $(x_2,\ y_1)$이다. 이때

$$\overline{AC}=|x_2-x_1|,\ \overline{BC}=|y_2-y_1|$$

이므로 피타고라스 정리에 의하여 다음이 성립한다.

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$$
$$=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

a가 실수일 때 $|a|^2=a^2$

따라서 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

이다. 특히 원점 $O(0,\ 0)$과 점 $A(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

❶ 특히 원점 O와 점 $A(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

보기 (1) 두 점 $A(1,\ 2)$, $B(4,\ 6)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{25}=5$$

(2) 원점 $O(0,\ 0)$과 점 $A(-1,\ 3)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$$

문제 2 다음 두 점 A, B 사이의 거리를 구하여라.

(1) $A(0,\ 1)$, $B(2,\ 0)$ (2) $A(-2,\ 1)$, $B(2,\ -3)$

(3) $A(2,\ 5)$, $B(7,\ 5)$ (4) $A(0,\ 0)$, $B(-1,\ 4)$

본문 해설

❶ 원점 $O(0,\ 0)$과 점 $A(x_1,\ y_1)$ 사이의 거리는 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리를 구하는 식

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

에서 $B(x_2,\ y_2)$ 대신에 $O(0,\ 0)$으로 바꾸어 유도한다.

2

목표| 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overline{AB}=\sqrt{(2-0)^2+(0-1)^2}=\mathbf{\sqrt{5}}$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+(-3-1)^2}=\sqrt{32}=\mathbf{4\sqrt{2}}$

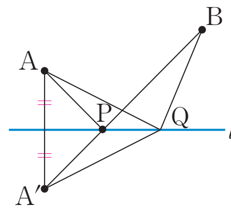
(3) $\overline{AB}=\sqrt{(7-2)^2+(5-5)^2}=\mathbf{5}$

(4) $\overline{AB}=\sqrt{(-1-0)^2+(4-0)^2}=\mathbf{\sqrt{17}}$

주의| 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리는 수직선 위의 두 점 사이의 거리와 피타고라스 정리를 이용하여 구할 수 있다.

지/도/자/료 최단 경로

일반적으로 두 점 사이의 거리는 특별한 언급이 없으면 최단 거리를 뜻한다. 이를 활용한 실생활 문제 중 대표적인 것이 최단 경로에 관한 문제이다.



예를 들어 점 A에서 직선 l 위의 한 점을 거쳐 점 B까지 최단 거리로 가려면 오른쪽 그림의 점 P를 거쳐서 가면 된다. 이 그림에서 점 A′은 직선 l에 대하여 점 A와 대칭인 점이고, 점 P는 선분 A′B와 직선 l의 교점이다.

최단 경로의 문제는 최적화 문제에도 많이 쓰이며, 이와 관련된 것으로 당구공이 쿠션을 맞고 진행하는 경로(교과서 176쪽 참조) 등이 있다.

교과서 135 쪽

예제 01 세 점 A(2, 2), B(−4, −1), C(4, −2)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 직각삼각형임을 보여라.

풀이 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AB}=\sqrt{(-4-2)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{45}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{\{4-(-4)\}^2+\{-2-(-1)\}^2}=\sqrt{65}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(2-4)^2+\{2-(-2)\}^2}=\sqrt{20}$$

이므로 $\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=45+20=65=\overline{BC}^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이다.

문제 3 세 점 A(−4, 1), B(2, −2), C(5, 4)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하여라.

예제 02 두 점 A(−1, 3), B(3, 5)에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

x축 위에 있는 점의 y좌표는 0이다.

풀이 점 P의 좌표를 $(x, 0)$이라고 하면

$\overline{AP}=\sqrt{\{x-(-1)\}^2+(0-3)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(0-3)^2}$

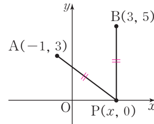
$\overline{BP}=\sqrt{(x-3)^2+(0-5)^2}$

주어진 조건에서 $\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(x+1)^2+(0-3)^2=(x-3)^2+(0-5)^2$

$8x=24$, $x=3$

따라서 점 P의 좌표는 P(3, 0)이다.



답 P(3, 0)

문제 4 두 점 A(2, 3), B(5, −4)에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

우리나라에서 경도선의 간격은 1°에 99 km, 위도선의 간격은 1°에 111 km이고, 독도의 위치는 (동경 131°, 북위 37°), 제주도의 위치는 (동경 126°, 북위 33°)라고 할 때, 독도와 제주도 사이의 거리는 약 몇 km인지 구하여라.

3

목표| 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 이용하여 삼각형의 종류를 판정할 수 있게 한다.

풀이| 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{(2+4)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{45}$

$\overline{BC}=\sqrt{(5-2)^2+(4+2)^2}=\sqrt{45}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-4-5)^2+(1-4)^2}=\sqrt{90}$

이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$

따라서 삼각형 ABC는 **$\angle B=90°$인 직각이등변삼각형**이다.

4

목표| 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 활용할 수 있게 한다.

풀이| 점 P의 좌표를 $(0, y)$라고 하면

$\overline{AP}=\sqrt{(0-2)^2+(y-3)^2}$

$\overline{BP}=\sqrt{(0-5)^2+\{y-(-4)\}^2}=\sqrt{(0-5)^2+(y+4)^2}$

주어진 조건에서 $\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(0-2)^2+(y-3)^2=(0-5)^2+(y+4)^2$

$4+y^2-6y+9=25+y^2+8y+16$

$14y=-28$, $y=-2$

따라서 점 P의 좌표는 **P(0, −2)**이다.

단원 과제

목표| 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 독도와 제주도의 경도의 차는 5°이고, 경도선의 간격은 1°에 99 km이므로 독도와 제주도의 경도의 차를 km로 나타내면

$5\times99=495$(km)

독도와 제주도의 위도의 차는 4°이고, 위도선의 간격은 1°에 111 km이므로 독도와 제주도의 위도의 차를 km로 나타내면

$4\times111=444$(km)

따라서 독도와 제주도 사이의 거리는

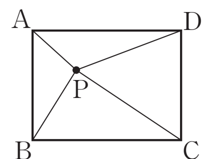
$\sqrt{495^2+444^2}=\sqrt{245025+197136}$

$=\sqrt{442161}=664.951\cdots$

이므로 약 **665 km**이다.

지/도/자/료

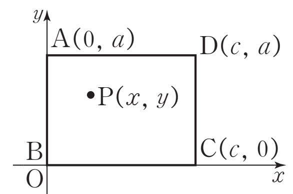
두 점 사이의 거리를 이용하여 도형의 여러 가지 성질이 성립함을 보일 수 있다. 예를 들어 직사각형 ABCD와 임의의 점 P에 대하여



$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$

이 성립함을 설명하여 보자.

점 B를 원점으로 잡고 A$(0, a)$, C$(c, 0)$으로 놓으면 D(c, a)이므로 임의의 점 P(x, y)에 대하여



$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\{x^2+(y-a)^2\}+\{(x-c)^2+y^2\}$

$=(x^2+y^2)+\{(x-c)^2+(y-a)^2\}=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$이 성립한다.

02 선분의 내분과 외분

소단원 지도 목표

① 선분의 내분과 외분의 의미를 이해하게 한다.
② 수직선 위에서 선분을 내분하는 점과 외분하는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.
③ 좌표평면 위의 선분을 내분하는 점과 외분하는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.
④ 선분을 내분하는 점과 외분하는 점의 좌표 공식을 활용하여 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 선분을 $m:n$으로 내분 또는 외분한다고 할 때 m과 n은 모두 양수임을 강조한다.
2. 선분 AB를 내분하는 점은 선분 AB 위의 점이고 외분하는 점은 선분 AB의 연장선 위의 점임을 지도한다.
3. 선분 AB, BA를 각각 $m:n$으로 내분하는 점은 서로 다름에 유의하게 한다.
4. 선분을 $m:n$으로 외분할 때 외분점이 선분의 오른쪽 또는 왼쪽에 있음을 유의하고, 특히 $m=n$인 경우에는 선분의 외분점이 존재하지 않음을 지도한다.

교과서 140 쪽

02 선분의 내분과 외분

● 선분의 내분과 외분을 이해하고, 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.

수직선 위에서 선분을 내분하는 점과 외분하는 점을 어떻게 구하는가?

생각 열기

지레

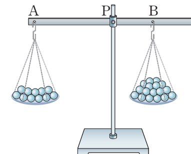
옛날부터 사람들은 무거운 물체를 들어 올리거나 이동시키기 위하여 지레, 도르래, 빗면 등의 도구를 사용하였다. 기원전 3세기경 아르키메데스(Archimedes : B.C. 287~B.C. 212)는 "나에게 충분히 긴 지렛대와 받침대를 준다면 지구도 들 수 있다."라고 하였다. 이 말은 지레를 이용하면 작은 힘으로도 매우 무거운 물체를 들거나 움직이게 할 수 있다는 것을 비유한 것이다. 지레의 종류로는 가위, 병따개, 핀셋, 양팔저울 등이 있다.

탐구 활동

오른쪽 그림과 같은 양팔저울이 수평을 이룰 때, 선분 AP와 선분 PB의 길이는 A와 B에 매달려 있는 물체의 무게에 반비례한다고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. A와 B에 매달려 있는 물체의 무게의 비가 2 : 3일 때, $\overline{AP}:\overline{PB}$를 구하여 보자.

2. A와 B에 매달려 있는 물체의 무게의 비가 $n:m$일 때, $\overline{AP}:\overline{PB}$를 구하여 보자.



선분 AB 위의 점 P에 대하여

$$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n\ (m>0,\ n>0)$$

일 때, 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 내분한다고 한다.

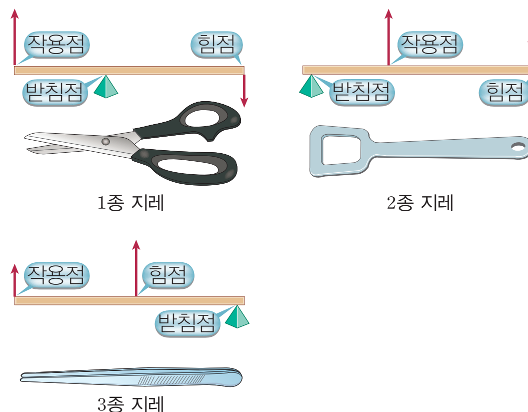
● 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 P는 선분 AB 위에 있다.
● 선분을 내분하는 점을 내분점이라고 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 내분(內分, internal division)
• 외분(外分, external division)

생각 열기 참/고/자/료

지레에는 힘이 직접 작용하는 힘점, 지레의 한 부분을 움직이지 않도록 고정시켜 주는 받침점, 지레가 물체에 작용하는 작용점이 있다. 아르키메데스가 발견한 지레의 원리를 식으로 나타내면 다음과 같다.
(힘점에 작용한 힘)×(힘점과 받침점 사이의 거리)
=(작용점에 작용한 힘)×(작용점과 받침점 사이의 거리)
지레는 힘점, 작용점, 받침점의 위치에 따라 다음 그림과 같이 세 가지 종류로 분류할 수 있다.



1종 지레와 2종 지레의 경우, 받침점과 힘점 사이의 거리가 받침점과 작용점 사이의 거리보다 멀기 때문에 작은 힘으로 물체를 들어 올릴 수 있지만 지레의 이동 거리는 길어진다. 한편 3종 지레의 경우, 힘의 이득은 없지만 힘점을 조금만 움직여도 작용점의 이동 거리가 커지는 효과를 얻을 수 있다.

교과서 141 쪽

❶ 이제 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 x를 구하여 보자.

(ⅰ) $x_1<x<x_2$일 때

$\overline{AP}=x-x_1$, $\overline{PB}=x_2-x$

이고, $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$이므로

$(x-x_1):(x_2-x)=m:n$

$n(x-x_1)=m(x_2-x)$

이다. 이것을 x에 대하여 풀면 다음과 같다.

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

(ⅱ) $x_2<x<x_1$일 때

$\overline{AP}=x_1-x$, $\overline{PB}=x-x_2$

이고, $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$이므로

$(x_1-x):(x-x_2)=m:n$

$n(x_1-x)=m(x-x_2)$

이다. 이것을 x에 대하여 풀면 다음과 같다.

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 x는

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

❷ 이다. 특히 $m=n$일 때 점 P는 선분 AB의 중점이 되고, 그 좌표 x는

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$

이다.

선분 AB의 중점은 선분 AB를 1 : 1로 내분하는 점이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

수직선 위의 선분을 내분하는 점의 좌표

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$$

특히 선분 AB의 중점 M의 좌표는

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

본문 해설

❶ 점 P가 선분 AB를 $m:n$으로 내분하면 점 P는 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$을 만족시키는 선분 AB 위의 점이다. 이때 세 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$, $P(x)$의 좌표 사이의 관계는 다음 그림을 이용하여 이해하면 기억하기 쉽다.

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

한편 $m\neq n$일 때, 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점과 선분 BA를 $m:n$으로 내분하는 점은 같지 않다.

❷ $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$에서 $m=n$이면

$$x=\frac{mx_2+mx_1}{2m}=\frac{m(x_1+x_2)}{2m}=\frac{x_1+x_2}{2}$$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 양쪽 접시에 담겨져 있는 물체의 무게가 다를 때, 양팔저울이 수평이 되도록 하는 지점 P에 대하여 $\overline{AP}:\overline{PB}$를 구함으로써 선분을 내분하는 점의 개념을 알도록 하기 위한 것이다.

선분 AP와 선분 PB의 길이는 A와 B에 매달려 있는 물체의 무게에 반비례하므로

1. $\overline{AP}:\overline{PB}=3:2$

2. $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$

읽/기/자/료 데카르트

데카르트

데카르트(Descartes, R. ; 1596~1650)는 자신의 학교 생활을 뒤돌아 보면서 침대에서 보낸 조용한 아침의 명상이 자신의 철학과 수학의 참다운 원천이었다고 얘기한다. 그 예에 해당하는 일화가 있다. 그가 침대에 누워 천장에 붙어 있는 파리를 보고 파리의 위치를 나타내는 일반적인 방법을 찾으려고 애쓰다가 '좌표'라는 발상을 하게 되었다는 것이다. 우리가 이 일화에서 유심히 보아야 할 것은 천장에 붙어 있는 것이 얼룩과 같이 고정된 것이 아닌 움직이는 물체, 즉 파리라는 것이다.
파리가 움직이면 x의 값이 변하면서 y의 값이 따라서 변화한다. 예를 들어 x축, y축이 만든 직각의 이등분선을 그리는 파리의 움직임은 '$y=x$'라는 식으로 간단히 나타낼 수 있다.
따라서 이 이야기는 수의 성질을 연구하는 대수학과 도형의 성질을 연구하는 기하학을 하나로 묶어 연구한 데카르트의 수학하는 방법, 즉 해석기하학의 발견을 귀띔해 주는 일화인 것이다.

1

목표| 수직선 위의 두 점을 연결한 선분을 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 점 P의 좌표를 x_1이라고 하면

$$x_1=\frac{2\times6+3\times(-4)}{2+3}=0$$

이므로 점 P의 좌표는 **P(0)**

(2) 점 Q의 좌표를 x_2라고 하면

$$x_2=\frac{3\times6+2\times(-4)}{3+2}=2$$

이므로 점 Q의 좌표는 **Q(2)**

(3) 점 M의 좌표를 x_3이라고 하면

$$x_3=\frac{-4+6}{2}=1$$

이므로 점 M의 좌표는 **M(1)**

본문 해설

❶ 점 Q가 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분할 때, $m>n$이면 점 Q는 점 B쪽에 가까이 있고 $m<n$이면 점 Q는 점 A쪽에 가까이 있다.

한편 선분 AB를 $m:n$ $(m>n>0)$으로 외분하는 점을 Q라고 하면 점 B는 선분 AQ를 $(m-n):n$으로 내분하는 점과 같다.

지/도/자/료

1. 내분점과 외분점의 공식은 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 $x_1>x_2$일 때와 $x_2>x_1$일 때 모두 성립한다.

2. 내분점과 외분점의 공식에서 x_1, x_2의 계수의 합은 1이다.

즉, 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$를 $m:n$으로 내분하는 점을 $P(p)$, 외분하는 점을 $Q(q)$라고 할 때

$p=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$에서 $\dfrac{m}{m+n}+\dfrac{n}{m+n}=1$

$q=\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$에서 $\dfrac{m}{m-n}+\dfrac{-n}{m-n}=1$

따라서 $\dfrac{m}{m+n}=k$라고 하면 $\dfrac{n}{m+n}=1-k$이므로

$p=(1-k)x_1+kx_2\ (0\leq k\leq1)$

로 나타낼 수 있다.

교과서 138 쪽

예제 01 수직선 위의 두 점 A(1), B(9)에 대하여 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점 P와 선분 AB의 중점 M의 좌표를 각각 구하여라.

풀이 점 P의 좌표를 x_1이라고 하면 $x_1=\dfrac{1\times9+3\times1}{1+3}=3$이므로 점 P의 좌표는 P(3)

점 M의 좌표를 x_2라고 하면 $x_2=\dfrac{1+9}{2}=5$이므로 점 M의 좌표는 M(5)

답 P(3), M(5)

문제 1 수직선 위의 두 점 A(−4), B(6)에 대하여 다음 점의 좌표를 구하여라.

(1) 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점 P

(2) 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점 Q

(3) 선분 AB의 중점 M

❶ 선분 AB의 연장선 위의 점 Q에 대하여

$$\overline{AQ}:\overline{BQ}=m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$$

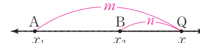
일 때, 점 Q는 선분 AB를 $m:n$으로 외분한다고 한다.

● 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q는 선분 AB의 연장선 위에 있다.
● 선분을 외분하는 점을 외분점이라고 한다.

이제 수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 좌표 x를 구하여 보자.

(i) $x_1<x_2<x$일 때

$\overline{AQ}=x-x_1$, $\overline{BQ}=x-x_2$



이고, $\overline{AQ}:\overline{BQ}=m:n$이므로

$(x-x_1):(x-x_2)=m:n$

$n(x-x_1)=m(x-x_2)$

이다. 이것을 x에 대하여 풀면 다음과 같다.

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

읽/기/자/료 음계와 내분점

동양과 서양에서 사용하는 음계는 서로 달라 보이지만 내분점의 원리를 이용하였다는 점에서 동일하다.

먼저 서양에서는 현의 길이와 음의 높이가 반비례하는 피타고라스의 음계를 사용하였다. '도' 음을 내는 현의 길이를 1 : 8로 내분하는 점을 누르면 '레', 1 : 4로 내분하는 점을 누르면 '미', 1 : 3으로 내분하는 점을 누르면 '파', 1 : 2로 내분하는 점을 누르면 '솔', 2 : 3으로 내분하는 점을 누르면 '라', 7 : 8로 내분하는 점을 누르면 '시', 1 : 1로 내분하는 점을 누르면 '도'가 된다.

동양에서는 율관의 길이와 음의 높이가 반비례한다는 사실을 이용하였다. 즉, 주어진 율관의 길이를 $\dfrac{2}{3}$배하면 5도 높은 음이 된다는 삼분손익법과 주어진 율관의 길이를 $\dfrac{4}{3}$배하면 4도 낮은 음이 된다는 삼분익일법을 순서대로 반복하여 12율려(律呂)의 음계를 만들어 사용하였다.

교과서 139 쪽

(ii) $x<x_1<x_2$일 때

$\overline{AQ}=x_1-x$, $\overline{BQ}=x_2-x$

이고, $\overline{AQ}:\overline{BQ}=m:n$이므로

$(x_1-x):(x_2-x)=m:n$

$n(x_1-x)=m(x_2-x)$

이다. 이것을 x에 대하여 풀면 다음과 같다.

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

(i), (ii)에 의하여 선분 AB를 $m:n$ ($m>0$, $n>0$, $m\neq n$)으로 외분하는 점 Q의 좌표 x는

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

이다.

$x_1>x_2$일 때에도 같은 결과를 얻는다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **수직선 위의 선분을 외분하는 점의 좌표**

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ ($m>0$, $n>0$, $m\neq n$)으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right)$$

보기 수직선 위의 두 점 A(1), B(3)에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표 x는

$$x=\frac{2\times3-1\times1}{2-1}=5$$

문제 2 수직선 위의 두 점 A(−5), B(3)에 대하여 다음 점의 좌표를 구하여라.

(1) 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점 P

(2) 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점 Q

사고력 기르기

▸추론
의사소통
문제 해결

수직선 위의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 $m=n$ ($m>0$, $n>0$)일 때, 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점이 존재하지 않는 이유를 설명하여 보자.

본문 해설

❶ 외분점을 구하는 공식은 내분점을 구하는 공식에서 n 대신 $-n$을 대입하여 유도할 수도 있다.

사고력 기르기 추론

출제 의도| 수직선 위의 두 점을 연결한 선분을 $m:n$ ($m=n$)으로 외분하는 점이 존재하지 않는 이유를 설명할 수 있게 한다.

풀이| $m=n$이면 선분 AB의 연장선 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:1$이므로 두 점 A, B는 같은 점이 된다.
따라서 점 P는 존재하지 않는다.

2

목표| 수직선 위의 두 점을 연결한 선분을 외분하는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 점 P의 좌표를 x_1이라고 하면

$$x_1=\frac{3\times3-2\times(-5)}{3-2}=19$$

이므로 점 P의 좌표는 **P(19)**

(2) 점 Q의 좌표를 x_2라고 하면

$$x_2=\frac{2\times3-3\times(-5)}{2-3}=-21$$

이므로 점 Q의 좌표는 **Q(−21)**

지/도/자/료

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 P와 $n:m$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\right),\ Q\left(\frac{nx_2-mx_1}{n-m}\right)$$

이므로 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\frac{\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}+\dfrac{nx_2-mx_1}{n-m}}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}$$

한편 선분 AB의 중점의 좌표는 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$

따라서 선분 PQ의 중점과 선분 AB의 중점은 일치한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 직사각형 모양의 종이를 순서에 따라 접는 과정에서 좌표평면 위의 선분을 내분하는 점을 구하는 공식을 발견하는 토대가 되도록 한다.

1. $\angle AQB = \angle FQD$ (맞꼭지각),
$\angle QAB = \angle QFD$ (엇각)이므로
삼각형 QAB와 삼각형 QFD는 닮음이다.
$\overline{AB} : \overline{FD} = 2 : 1$이므로 삼각형 QAB와 삼각형 QFD의 닮음비는 **2 : 1**이다.

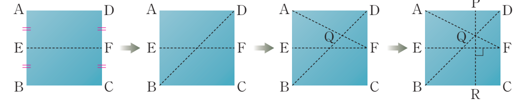
2. $\overline{QB} : \overline{QD} = 2 : 1$이므로 $\overline{QB} = 2\overline{QD}$
$\overline{BD} = \overline{QB} + \overline{QD} = 3\overline{QD}$이므로
$\overline{BD} : \overline{QD} = 3 : 1$
그런데 $\triangle ABD \backsim \triangle PQD$이므로
$\overline{AD} : \overline{PD} = 3 : 1$, $\overline{AD} = 3\overline{PD}$
$\overline{AP} = \overline{AD} - \overline{PD} = 2\overline{PD}$이므로
$\overline{AP} : \overline{PD} = $ **2 : 1**

교과서 140 쪽

좌표평면 위에서 선분을 내분하는 점과 외분하는 점을 어떻게 구하는가?

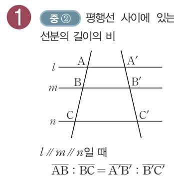
탐구 활동 직사각형 모양의 종이 ABCD를 다음 순서대로 접어 보고, 물음에 답하여 보자.

❶ 선분 AD와 선분 BC가 일치하도록 반으로 접어서 점 E와 점 F를 찾는다.
❷ 대각선 BD를 접는다.
❸ 대각선 AF를 접어서 선분 AF와 선분 BD가 만나는 점을 점 Q라고 한다.
❹ 접는 선이 점 Q를 지나고, 선분 EF와 수직이 되도록 접어서 점 P와 점 R를 찾는다.



1. 삼각형 QAB와 삼각형 QFD의 닮음비를 구하여 보자.
2. **1**을 이용하여 두 선분 AP, PD의 길이의 비를 구하여 보자.

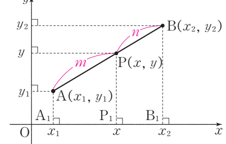
❶ 중② 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비



$l /\!/ m /\!/ n$일 때
$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'}$

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표 (x, y)를 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 점 A, B, P에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A_1, B_1, P_1이라고 하면
$A_1(x_1, 0)$, $B_1(x_2, 0)$, $P_1(x, 0)$
이고
$\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{A_1P_1} : \overline{P_1B_1} = m : n$
이다.



이때 점 P_1은 선분 A_1B_1을 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점이므로

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

이다. y축 위에서도 같은 방법으로 생각하면

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

이다. 따라서 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n},\ \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

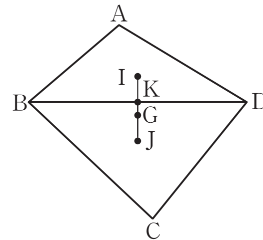
이다.

본문 해설

❶ 오른쪽 그림과 같이 평행한 세 직선 l, m, n과 두 직선 a, b가 만나는 점을 각각 A, B, C, A′, B′, C′이라고 하자. 또 점 A를 지나고 직선 b에 평행한 직선을 그어서 직선 m, n과 만나는 점을 각각 D, E라고 하자.
$\triangle ACE$에서 $\overline{BD} /\!/ \overline{CE}$이므로
$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{DE}$
이다. 또 □ADB′A′과 □DEC′B′이 평행사변형이므로 $\overline{AD} = \overline{A'B'}$, $\overline{DE} = \overline{B'C'}$이다.
따라서 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'}$이 성립한다.

지/도/자/료

1. 사각형의 무게중심과 내분점의 관계
질량이 각각 m_1, m_2인 두 물체를 합하여 하나의 물체로 보았을 때의 무게중심은 두 물체 각각의 무게중심을 잇는 선분을 $m_2 : m_1$로 내분하는 점이다. 사각형을 두 삼각형으로 나누면 삼각형의 질량은 넓이에 비례하므로 다음이 성립한다.



$\triangle ABD$, $\triangle BCD$의 무게중심을 각각 I, J라 하고, 두 선분 IJ, BD의 교점을 K라고 하면 □ABCD의 무게중심은 선분 IJ를 $\overline{JK} : \overline{IK}$로 내분하는 점이다. 즉, $\overline{JG} = \overline{IK}$가 성립하는 선분 IJ 위의 점 G가 □ABCD의 무게중심이다.

교과서 141 쪽

특히 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $m=n$인 경우이므로

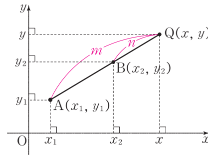
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

이다.

마찬가지 방법으로 선분 AB를 $m:n$ ($m>0$, $n>0$, $m\neq n$)으로 외분하는 점 Q의 좌표 $(x,\ y)$를 구하면

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

이다.



● 좌표평면에서도 선분 AB를 $m:n$으로 외분할 때, $m=n$이면 외분하는 점이 존재하지 않는다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표평면 위의 선분을 내분하는 점과 외분하는 점의 좌표

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ ($m>0$, $n>0$)으로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)\ (\text{단, } m\neq n)$$

특히 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

예제 02 좌표평면 위의 두 점 $A(1,\ -2)$, $B(4,\ 4)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표를 각각 구하여라.

풀이 점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면

$$x_1=\frac{2\times4+1\times1}{2+1}=3,\ y_1=\frac{2\times4+1\times(-2)}{2+1}=2$$

이므로 점 P의 좌표는 $P(3,\ 2)$

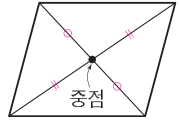
점 Q의 좌표를 $(x_2,\ y_2)$라고 하면

$$x_2=\frac{2\times4-1\times1}{2-1}=7,\ y_2=\frac{2\times4-1\times(-2)}{2-1}=10$$

이므로 점 Q의 좌표는 $Q(7,\ 10)$

답 $P(3,\ 2)$, $Q(7,\ 10)$

3. 평행사변형의 두 대각선



평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 두 대각선의 중점이 일치한다.

즉, 네 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$, $D(x_4,\ y_4)$를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD에 대하여 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_3}{2},\ \frac{y_1+y_3}{2}\right)$$

이고, 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_2+x_4}{2},\ \frac{y_2+y_4}{2}\right)$$

이므로

$$\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2},\ \frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y_4}{2}$$

2. 삼각형의 오심

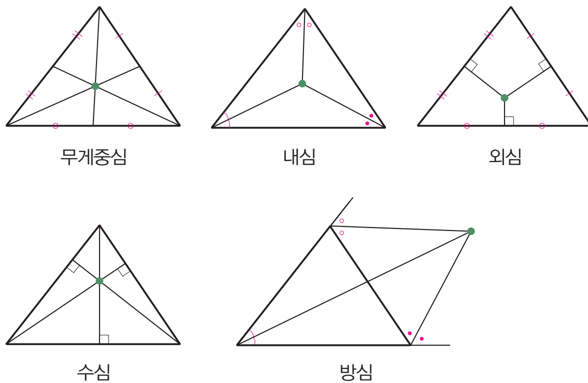
(1) 무게중심: 세 중선의 교점

(2) 내심: 세 내각의 이등분선의 교점

(3) 외심: 세 변의 수직이등분선의 교점

(4) 수심: 세 수선의 교점

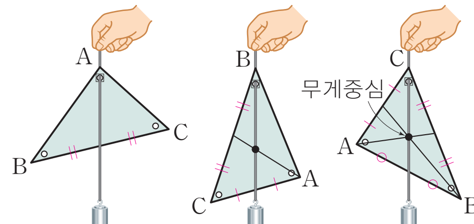
(5) 방심: 한 내각의 이등분선과 그 각이 아닌 두 외각의 이등분선의 교점



읽/기/자/료 무게중심의 물리적 의미

무게중심의 물리적 의미는 실을 매달았을 때, 지표에 수직인 직선들의 교점이다.

예를 들어 두꺼운 종이를 잘라 내어 적당한 크기의 삼각형을 만든다. 삼각형의 세 꼭짓점에 구멍을 뚫고 다음 그림과 같이 각 꼭짓점에 실을 연결한 후 추를 매달면 실이 지나는 두 선분의 교점이 이 삼각형의 무게중심이다.



3

목표| 좌표평면 위의 두 점을 연결한 선분을 내분하는 점과 외분하는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\mathrm{P}\left(\frac{5\times9+3\times1}{5+3}, \frac{5\times5+3\times(-3)}{5+3}\right)$

$=\mathbf{P(6,\ 2)}$

$\mathrm{Q}\left(\frac{5\times9-3\times1}{5-3}, \frac{5\times5-3\times(-3)}{5-3}\right)$

$=\mathbf{Q(21,\ 17)}$

$\mathrm{M}\left(\frac{1+9}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)=\mathbf{M(5,\ 1)}$

(2) $\mathrm{P}\left(\frac{5\times(-2)+3\times4}{5+3}, \frac{5\times3+3\times3}{5+3}\right)$

$=\mathbf{P\left(\frac{1}{4},\ 3\right)}$

$\mathrm{Q}\left(\frac{5\times(-2)-3\times4}{5-3}, \frac{5\times3-3\times3}{5-3}\right)$

$=\mathbf{Q(-11,\ 3)}$

$\mathrm{M}\left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{3+3}{2}\right)=\mathbf{M(1,\ 3)}$

교과서 142 쪽

문제 3 다음 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 5 : 3으로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q, 선분 AB의 중점 M의 좌표를 각각 구하여라.

(1) A(1, −3), B(9, 5)　　(2) A(4, 3), B(−2, 3)

예제 03 세 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하여라.

풀이 변 BC의 중점을 $\mathrm{M}(x',\ y')$이라고 하면

$$x'=\frac{x_2+x_3}{2},\ y'=\frac{y_2+y_3}{2}$$

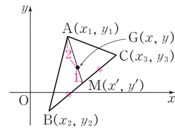
삼각형 ABC의 무게중심 $\mathrm{G}(x,\ y)$는 중선 AM을 2 : 1로 내분하므로

$$x=\frac{2\times x'+1\times x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{2\times y'+1\times y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

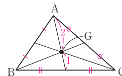
따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$



답 $\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

중② 삼각형의 세 중선은 한 점(무게중심)에서 만나고, 이 점은 세 중선의 길이를 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 내분한다.



문제 4 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하여라.

(1) A(−1, −2), B(2, 5), C(5, 3)　　(2) A(0, 0), B(−2, 7), C(5, 2)

발전 **문제 5** 세 점 A(4, 1), B(2, 3), C(−6, 5)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라고 할 때, 삼각형 DEF의 무게중심 G의 좌표를 구하여라.

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

삼각형 ABC의 두 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$이고, 무게중심의 좌표가 G(0, 0)일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하는 방법에 대하여 설명하여 보자.

4

목표| 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\mathrm{G}\left(\frac{-1+2+5}{3}, \frac{-2+5+3}{3}\right)$이므로　$\mathbf{G(2,\ 2)}$

(2) $\mathrm{G}\left(\frac{0+(-2)+5}{3}, \frac{0+7+2}{3}\right)$이므로　$\mathbf{G(1,\ 3)}$

5

목표| 삼각형의 각 변의 중점을 연결하여 만든 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 D의 좌표는 $\left(\frac{4+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$이므로　D(3, 2)

점 E의 좌표는 $\left(\frac{2+(-6)}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$이므로　E(−2, 4)

점 F의 좌표는 $\left(\frac{-6+4}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$이므로　F(−1, 3)

따라서 삼각형 DEF의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{3+(-2)+(-1)}{3}, \frac{2+4+3}{3}\right)$

이므로　$\mathbf{G(0,\ 3)}$

참고| 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 (0, 3)으로 삼각형 DEF의 무게중심 G와 일치한다.
일반적으로 삼각형의 무게중심과 각 변의 중점을 연결하여 만든 삼각형의 무게중심은 일치한다.

사고력 기르기　추론

출제 의도| 삼각형의 두 꼭짓점과 무게중심의 좌표를 알 때 삼각형의 나머지 한 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$$\frac{x_1+x_2+x}{3}=0,\ \frac{y_1+y_2+y}{3}=0$$

이므로　$x=-(x_1+x_2)$, $y=-(y_1+y_2)$

따라서 점 C의 좌표는 $\mathbf{C(-x_1-x_2,\ -y_1-y_2)}$이다.

교과서 143 쪽

중단원 기초

[해답 p.227]

수준별 학습

1 다음 두 점 A, B 사이의 거리를 구하여라.

(1) A(2), B(5) (2) A(4), B(−5)
(3) A(−1), B(4) (4) A(−7), B(3)

01 두 점 사이의 거리
수직선 위의 두 점 사이의 거리

2 다음 두 점 A, B 사이의 거리를 구하여라.

(1) A(4, 1), B(2, 1) (2) A(−2, −3), B(−2, 1)
(3) A(1, 3), B(3, 1) (4) A(0, 0), B(−5, 2)

01 두 점 사이의 거리
좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

3 두 점 A(−6), B(8)에 대하여 다음 점의 좌표를 구하여라.

(1) 선분 AB를 4 : 3으로 내분하는 점 P
(2) 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 Q
(3) 선분 AB의 중점 M

02 선분의 내분과 외분
수직선 위의 선분의 내분과 외분

4 두 점 A(3, 4), B(−2, −1)에 대하여 다음 점의 좌표를 구하여라.

(1) 선분 AB를 1 : 4로 내분하는 점 P
(2) 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점 Q
(3) 선분 AB의 중점 M

02 선분의 내분과 외분
좌표평면 위의 선분의 내분

5 두 점 A(−2, −3), B(1, −5)에 대하여 다음 점의 좌표를 구하여라.

(1) 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점 P
(2) 선분 AB를 3 : 5로 외분하는 점 Q

02 선분의 내분과 외분
좌표평면 위의 선분의 외분

중/단/원 기초

1

목표| 수직선 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overline{AB}=|5-2|=\mathbf{3}$

(2) $\overline{AB}=|-5-4|=\mathbf{9}$

(3) $\overline{AB}=|4-(-1)|=\mathbf{5}$

(4) $\overline{AB}=|3-(-7)|=\mathbf{10}$

2

목표| 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\overline{AB}=\sqrt{(2-4)^2+(1-1)^2}=\mathbf{2}$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{\{-2-(-2)\}^2+\{1-(-3)\}^2}=\mathbf{4}$

(3) $\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=\mathbf{2\sqrt{2}}$

(4) $\overline{AB}=\sqrt{(-5-0)^2+(2-0)^2}=\mathbf{\sqrt{29}}$

3

목표| 수직선 위의 두 점을 연결한 선분을 내분하는 점과 외분하는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $P\left(\frac{4\times8+3\times(-6)}{4+3}\right)$이므로 $\mathbf{P(2)}$

(2) $Q\left(\frac{3\times8-1\times(-6)}{3-1}\right)$이므로 $\mathbf{Q(15)}$

(3) $M\left(\frac{-6+8}{2}\right)$이므로 $\mathbf{M(1)}$

4

목표| 좌표평면 위의 두 점을 연결한 선분을 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이|

(1) $P\left(\frac{1\times(-2)+4\times3}{1+4}, \frac{1\times(-1)+4\times4}{1+4}\right)$

이므로 $\mathbf{P(2,\ 3)}$

(2) $Q\left(\frac{3\times(-2)+2\times3}{3+2}, \frac{3\times(-1)+2\times4}{3+2}\right)$

이므로 $\mathbf{Q(0,\ 1)}$

(3) $M\left(\frac{3+(-2)}{2}, \frac{4+(-1)}{2}\right)$

이므로 $\mathbf{M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)}$

5

목표| 좌표평면 위의 두 점을 연결한 선분을 외분하는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $P\left(\frac{2\times1-1\times(-2)}{2-1}, \frac{2\times(-5)-1\times(-3)}{2-1}\right)$

이므로 $\mathbf{P(4,\ -7)}$

(2) $Q\left(\frac{3\times1-5\times(-2)}{3-5}, \frac{3\times(-5)-5\times(-3)}{3-5}\right)$

이므로 $\mathbf{Q\left(-\frac{13}{2}, 0\right)}$

중/단/원 기본

1

목표| 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 활용할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AB}=\sqrt{(-5-a)^2+(-2-6)^2}$
$=\sqrt{(a+5)^2+64}=10$

이므로

$(a+5)^2+64=100$, $a^2+10a-11=0$

따라서 $a=\mathbf{1}$ 또는 $a=\mathbf{-11}$이다.

2

목표| 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 이용하여 삼각형의 종류를 판정할 수 있게 한다.

풀이| 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$\overline{AB}=\sqrt{(7-2)^2+\{-3-(-2)\}^2}=\sqrt{26}$

$\overline{BC}=\sqrt{(4-7)^2+\{-5-(-3)\}^2}=\sqrt{13}$

$\overline{CA}=\sqrt{(2-4)^2+\{-2-(-5)\}^2}=\sqrt{13}$

이므로

$\overline{BC}=\overline{CA}$, $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$

따라서 삼각형 ABC는 **∠C=90°인 직각이등변삼각형**이다.

3

목표| 좌표평면 위의 두 점을 연결한 선분을 외분하는 점의 좌표를 구하는 공식을 활용할 수 있게 한다.

풀이| 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점의 좌표가 (3, 5)이므로

$\frac{-1-2a}{1-2}=3$, $\frac{b-4}{1-2}=5$

$1+2a=3$, $b-4=-5$

따라서 $\mathbf{a=1}$, $\mathbf{b=-1}$이다.

4

목표| 좌표평면 위의 두 점을 연결한 선분의 중점과 평행사변형의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 사각형 ABCD는 평행사변형이고, 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 선분 AC의 중점과 선분 BD의 중점은 일치한다.

즉, $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{5}{2}\right)=\left(\frac{7}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$이므로

$\frac{a+3}{2}=\frac{7}{2}$, $\frac{5}{2}=\frac{b+2}{2}$

따라서 $\mathbf{a=4}$, $\mathbf{b=3}$이다.

5

목표| 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| 삼각형 ABC의 무게중심 G는 중선인 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$G\left(\frac{2\times(-1)+1\times2}{2+1}, \frac{2\times(-5)+1\times4}{2+1}\right)$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는 **G(0, −2)**이다.

교과서 144 쪽

중단원 기본

[해답 p.227]

수준별 학습

1 두 점 $A(a, 6)$, $B(-5, -2)$ 사이의 거리가 10이 되도록 하는 a의 값을 모두 구하여라.

01 두 점 사이의 거리
좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

2 세 점 $A(2, -2)$, $B(7, -3)$, $C(4, -5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 말하여라.

01 두 점 사이의 거리
좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

3 두 점 $A(a, 2)$, $B(-1, b)$에 대하여 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점의 좌표가 (3, 5)일 때, a, b의 값을 구하여라.

02 선분의 내분과 외분
좌표평면 위의 선분의 외분

4 네 점 $A(a, -1)$, $B(2, b)$, $C(3, 6)$, $D(5, 2)$를 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, a, b의 값을 구하여라.

02 선분의 내분과 외분
좌표평면 위의 선분의 중점

5 점 A의 좌표가 (2, 4)인 삼각형 ABC에 대하여 선분 BC의 중점 M의 좌표가 (−1, −5)일 때, 무게중심 G의 좌표를 구하여라.

02 선분의 내분과 외분
삼각형의 무게중심

교과서 145 쪽

중단원 실력

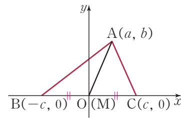
[해답 p.227]

수준별 학습

1 세 점 $A(0, 0)$, $B(2, 4)$, $C(3, 3)$에 대하여
$$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$$
를 만족시키는 점 P의 좌표를 구하여라.

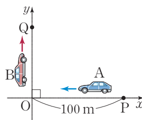
01 두 점 사이의 거리
좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

2 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라고 할 때, 오른쪽 그림을 이용하여 다음이 성립함을 보여라.
$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$



01 두 점 사이의 거리
좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

3 오른쪽 그림과 같이 수직으로 만나는 두 도로가 있다. 자동차 A는 O 지점에서 100 m 떨어진 P 지점에서 출발하여 O 지점의 방향으로 1초에 10 m의 속력으로 달리고, 자동차 B는 O 지점에서 출발하여 Q 지점의 방향으로 1초에 20 m의 속력으로 달린다. 두 자동차 A, B가 동시에 출발할 때, 두 자동차 사이의 거리의 최솟값을 구하여라.
(단, 자동차의 크기는 무시한다.)



01 두 점 사이의 거리
좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

4 두 점 $A(3, -2)$, $B(-2, 6)$에 대하여 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점이 제1사분면에 속할 때, 실수 t값의 범위를 구하여라.

02 선분의 내분과 외분
좌표평면 위의 선분의 내분

5 두 점 $A(0, 3)$, $B(6, 0)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, $3:1$로 외분하는 점을 Q라고 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 구하여라.
(단, O는 원점이다.)

02 선분의 내분과 외분
좌표평면 위의 선분의 내분과 외분

중/단/원 실력

1

목표| 좌표평면 위의 한 점에서 세 점까지의 거리가 각각 같게 하는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 $P(a, b)$라고 하면

$\overline{AP}^2=(a-0)^2+(b-0)^2$ ······ ①

$\overline{BP}^2=(a-2)^2+(b-4)^2$ ······ ②

$\overline{CP}^2=(a-3)^2+(b-3)^2$ ······ ③

①=②에서 $4a+8b-20=0$

①=③에서 $6a+6b-18=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$이므로 $\mathbf{P(1,\ 2)}$

2

목표| 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 이용하여 도형의 성질이 성립함을 보일 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2$
$=2(a^2+b^2+c^2)$

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+c^2$

따라서 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이 성립한다.

3

목표| 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 두 자동차 A, B의 t초 후의 좌표는 각각 $(100-10t, 0)$, $(0, 20t)$이므로 두 자동차 사이의 거리는

$\sqrt{(100-10t)^2+(-20t)^2}$

$=\sqrt{500(t-2)^2+8000}$

따라서 두 자동차 A, B 사이의 거리는 2초 후에 최소가 되고, 그때의 거리는

$\sqrt{8000}=\mathbf{40\sqrt{5}(m)}$이다.

4

목표| 좌표평면 위의 선분의 내분을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 선분 AB를 $t:(1-t)$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2t+3(1-t)}{t+(1-t)}, \dfrac{6t-2(1-t)}{t+(1-t)}\right)$

$=(3-5t, -2+8t)$

이 점이 제1사분면에 속하므로

$3-5t>0$이고 $-2+8t>0$

따라서 $\mathbf{\dfrac{1}{4}<t<\dfrac{3}{5}}$이다.

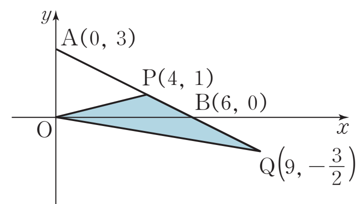
5

목표| 좌표평면 위의 선분의 내분과 외분을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 P의 좌표는 $P(4, 1)$

점 Q의 좌표는 $Q\left(9, -\dfrac{3}{2}\right)$

따라서 삼각형 OPQ는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$\triangle OPQ=\triangle OBP+\triangle OBQ$

$\triangle OBQ=\dfrac{1}{2}\times 6\times 1+\dfrac{1}{2}\times 6\times\dfrac{3}{2}=\mathbf{\dfrac{15}{2}}$

2 직선의 방정식

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

② 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해하게 한다.

③ 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 직선의 방정식	한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식
	두 점을 지나는 직선의 방정식
02 두 직선의 평행과 수직	두 직선이 평행하기 위한 조건
	두 직선이 수직이기 위한 조건
	점과 직선 사이의 거리
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 146 쪽

2 직선의 방정식

지구는 점점 뜨거워지고 있다.

기후 변화에 관한 정부 간 협의체인 IPCC가 발표한 제4차 보고서에 따르면 지난 100년 동안 지구의 평균 기온은 0.74 ℃ 상승하였다고 한다. 특히 최근 50년 동안 지구의 평균 기온은 10년마다 0.13 ℃씩 올랐으며 이 상승률은 지난 100년 동안 추세의 2.3배에 해당한다고 한다. 지구 온난화의 가장 큰 원인은 온실가스인데, 이 온실가스의 배출을 줄이기 위한 국제 사회의 노력이 계속되고 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 150 쪽

해마다 변하는 지구의 평균 기온 변화를 어떻게 나타낼 수 있을까?

들어가면서 우리나라에서 기상관측소 창설 이후의 관측 자료를 사용하여 기온의 경년 변화를 연구한 결과에 의하면 서울에서 100년에 2 ℃나 상승하였다.

기온의 상승과 같은 여러 현상들은 그 수치를 어림하여 나타내면 직선으로 표현할 수 있는 경우가 있다. 뿐만 아니라 거리에 나가면 여러 개의 직선들이 평행, 교차, 수직으로 배열되어 다양한 형태의 건물의 외관을 형성하고 있다.

이 단원에서는 직선을 방정식으로 나타내고, 두 직선이 평행, 수직하기 위한 조건, 점과 직선 사이의 거리에 대하여 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.	상	다양하게 주어지는 조건을 활용하여 직선의 방정식을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	한 정점을 지나고 기울기가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있다.
	하	기울기와 y절편이 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있다.
2. 두 직선의 평행 조건을 이해하고, 주어진 직선에 평행인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	상	두 직선의 평행 조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	주어진 직선에 평행한 직선의 방정식을 구할 수 있다.
	하	주어진 직선에 평행한 직선을 찾을 수 있다.
3. 두 직선의 수직 조건을 이해하고, 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.	상	두 직선의 수직 조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다.
	하	주어진 직선에 수직인 직선을 찾을 수 있다.
4. 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	상	점과 직선 사이의 거리를 구하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.
	하	점과 직선 사이의 거리의 뜻을 알고, 좌표축에 평행한 직선과 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

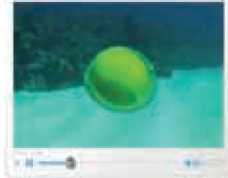
01 직선의 방정식

● 여러 가지 직선의 방정식을 구할 수 있다.

한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식을 어떻게 구하는가?

생각 열기 바닷속 수압

2011년 미국 버뮤다 해양과학연구소의 한 과학자는 수심 20 m 바닷속에서 계란을 깨는 실험 장면을 담은 동영상을 공개하였다. 깨진 계란은 바닷속 수압 때문에 투명한 흰자가 노른자를 감싼 채로 원형의 모양을 유지하였으며, 마치 물속을 둥둥 헤엄쳐 다니는 듯하였다.



탐구 활동 **어느 해수면에서의 수압은 1.05 kg/cm²이고, 수면 아래로 1 m 내려갈 때마다 수압이 0.10 kg/cm²씩 증가한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 수심 x m에서의 수압이 y kg/cm²일 때, y를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.
2. 수압이 10.5 kg/cm²인 지점의 수심을 구하여 보자.
3. 수심이 20 m에서 30 m로 변할 때와 90 m에서 100 m로 변할 때의 수압의 차이를 비교하여 보자.

중② 기울기가 m이고, y절편이 b인 직선의 방정식은 $y=mx+b$이다.

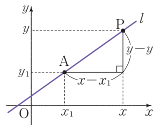
중② (기울기)$=\dfrac{(y\text{값의 증가량})}{(x\text{값의 증가량})}$

좌표평면 위의 한 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고, 기울기가 m인 직선 l의 방정식을 구하여 보자.

점 $A(x_1, y_1)$이 아닌 직선 l 위의 임의의 점을 $P(x, y)$라고 하면 직선 l의 기울기 m은

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

이다.



이것의 양변에 $x-x_1$을 곱하면

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 그런데 $P(x, y)$가 $A(x_1, y_1)$과 일치할 때에도 방정식 ①이 성립하므로 이것이 구하는 직선 l의 방정식이다.

01 직선의 방정식

소단원 지도 목표

① 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
③ 좌표축에 평행한 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
④ x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
⑤ 일차방정식과 직선의 관계를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 일차함수와 직선의 방정식을 연관시켜 이해하면서 기울기, x절편과 y절편 등의 용어의 뜻을 한 번 더 강조한다.
2. 기울기와 y절편이 정해지면 직선을 나타내는 방정식이 결정된다는 것을 이해하게 한다.
3. 직선을 방정식이라는 대수적인 식으로 나타낼 수 있음을 이해하게 한다.
4. x축 또는 y축에 평행한 직선의 방정식을 서로 혼동하지 않도록 지도한다.

생각 열기 참/고/자/료

물속의 한 지점에서는 모든 방향에서 같은 세기의 힘이 미친다. 수압의 크기는 물의 깊이에 따라 달라지며, 대기압을 고려하지 않으면, 깊이가 10 cm 증가할 때마다 10 g중의 비율로 수압이 증가한다. 만약 수심 1만 m의 해저에 있으면, 약 1,000 atm의 힘을 받게 되는 것이다. 1 atm은 1 cm²당 1 kg의 힘을 받는 것이며, km²당 1만 톤(t)의 수압을 받게 된다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 수심에 따른 수압의 변화를 x, y에 대한 일차방정식으로 나타내고 x의 계수가 의미하는 것이 직선의 기울기임을 발견하는 토대가 되도록 한다.

1. 해수면에서의 수압은 1.05 kg/cm²이고, 수면 아래로 1 m 내려갈 때마다 수압이 0.10 kg/cm²씩 증가하므로
$y=1.05+0.10x$
2. $10.5=1.05+0.10x$에서 $x=90$
즉, 구하는 수심은 **90 m**이다.
3. 두 경우 모두 수심의 차이가 10 m이므로 수압의 차이는 모두 1 kg/cm²로 **같다.**

본문 해설

❶ 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 x좌표에 관계없이 y좌표가 일정하므로 $y=y_1$이다.

1

목표 | 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $y-3=-3(x-1)$, $\boldsymbol{y=-3x+6}$

(2) x절편이 -1이므로 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y-0=2\{x-(-1)\}$, $\boldsymbol{y=2x+2}$

(3) x좌표에 관계없이 y좌표가 일정한 직선이므로
$\boldsymbol{y=1}$

교과서 148 쪽

❶ 특히 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고, x축에 평행한 직선의 방정식은 직선의 기울기가 0이므로

$$y-y_1=0(x-x_1)$$

이다. 즉, $y=y_1$이다.

● x축의 방정식은 $y=0$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식
점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고, 기울기가 m인 직선의 방정식은
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

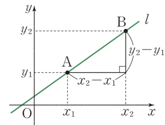
보기 (1) 점 $(3,\ 4)$를 지나고, 기울기가 2인 직선의 방정식은
$y-4=2(x-3)$, $y=2x-2$
(2) 점 $(-1,\ 2)$를 지나고, 기울기가 0인 직선의 방정식은
$y-2=0(x+1)$, $y=2$

문제 1 다음 직선의 방정식을 구하여라.
(1) 점 $(1,\ 3)$을 지나고, 기울기가 -3인 직선
(2) x절편이 -1이고, 기울기가 2인 직선
(3) 점 $(-2,\ 1)$을 지나고, x축에 평행한 직선

두 점을 지나는 직선의 방정식을 어떻게 구하는가?

❷ 좌표평면 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선 l의 방정식을 구하여 보자.

(i) $x_1\neq x_2$일 때
직선 l의 기울기 m은
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
이고, 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은 다음과 같다.



$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

특히 $y_1=y_2$이면 직선의 방정식은 $y=y_1$이다.

● 직선 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$은 직선 $y-y_1=m(x-x_1)$에 $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$을 대입한 것이다.

지/도/자/료

1. 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고, 기울기가 m인 직선의 방정식은 다른 방법으로도 지도할 수 있다.
기울기가 m이고, y절편이 n인 직선의 방정식은
$y=mx+n$
이고, 이 직선이 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나면
$y_1=mx_1+n$
이 성립하므로
$n=y_1-mx_1$
따라서 구하는 직선의 방정식은
$y=mx+y_1-mx_1$
즉, $y-y_1=m(x-x_1)$

2. 직선의 방정식
$y-y_1=m(x-x_1)$을 m에 대한 항등식으로 생각하면
$x=x_1$, $y=y_1$이다.
즉, 직선 $y-y_1=m(x-x_1)$은 m의 값에 관계없이 점 $(x_1,\ y_1)$을 지난다.

본문 해설

❷ 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은 기울기가 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$이고 점 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나므로

$$y-y_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$$

와 같이 점 B를 이용하여 구할 수도 있다.
예를 들어 두 점 $(2,\ 1)$, $(4,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

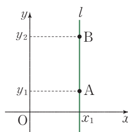
$$y-5=\frac{5-1}{4-2}(x-4),\ y=2x-3$$

과 같이 구할 수도 있다.
한편 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식을 $x_1\neq x_2$일 때와 $x_1=x_2$일 때로 경우를 나누어 나타내었으나 다음과 같이 하나의 식으로 나타낼 수 있다.

(ii) $x_1=x_2$일 때

직선 l은 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고, y축에 평행하므로 직선 l 위의 모든 점에 대하여 x좌표는 항상 x_1이다. 따라서 직선 l의 방정식은 다음과 같다.

$$x=x_1$$



y축의 방정식은 $x=0$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 점을 지나는 직선의 방정식

서로 다른 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

(1) $x_1\neq x_2$일 때 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

(2) $x_1=x_2$일 때 $x=x_1$

보기 (1) 두 점 $(2,\ 1)$, $(4,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{5-1}{4-2}(x-2),\ y=2x-3$$

(2) 두 점 $(1,\ -2)$, $(1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은 두 점의 x좌표가 서로 같으므로

$$x=1$$

문제 2 다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

(1) $(-2,\ 1)$, $(1,\ 4)$ (2) $(1,\ 3)$, $(4,\ 7)$

(3) $(2,\ -2)$, $(4,\ -2)$ (4) $(3,\ -1)$, $(3,\ 4)$

사고력 기르기

▸추론 / 의사소통 / 문제 해결

x절편이 a, y절편이 b $(a\neq0,\ b\neq0)$인 직선의 방정식은 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$과 같이 나타낼 수 있음을 설명하여 보자.

두 직선의 방정식 $y=2x+1$, $x=1$은 각각 일차방정식

$$2x-y+1=0,\ x-1=0$$

과 같이 나타낼 수 있다.

이와 같이 일반적으로 직선의 방정식은 모두 x, y에 대한 일차방정식

❶ $ax+by+c=0$ $(a\neq0$ 또는 $b\neq0)$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

$$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1) \quad \cdots\cdots ①$$

(i) $x_1\neq x_2$일 때, 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

이므로

$$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$$

(ii) $x_1=x_2$일 때, 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $x=x_1$이다. 그런데 ①에 $x_1=x_2$를 대입하면

$$(y_2-y_1)(x-x_1)=0$$

이때 $y_2\neq y_1$이므로 $x-x_1=0$이다.

(i), (ii)에 의하여 ①은 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식이다.

2

목표| 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y-1=\dfrac{4-1}{1-(-2)}\{x-(-2)\}$,

$\boldsymbol{y=x+3}$

(2) $y-3=\dfrac{7-3}{4-1}(x-1)$, $\boldsymbol{y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}}$

(3) $y-(-2)=\dfrac{-2-(-2)}{4-2}(x-2)$, $\boldsymbol{y=-2}$

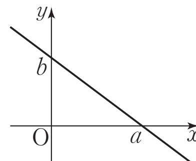
(4) 두 점의 x좌표가 서로 같으므로 $\boldsymbol{x=3}$

사고력 기르기 추론

출제 의도| x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| x절편이 a이므로 x축과 직선의 교점은 $(a,\ 0)$

y절편이 b이므로 y축과 직선의 교점은 $(0,\ b)$



따라서 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-0=\frac{b-0}{0-a}(x-a)$$

$$y=-\frac{b}{a}(x-a)$$

양변을 b로 나누면

$$\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

본문 해설

❶ $ax+by+c=0$이 직선이려면 이것이 x, y에 대한 일차방정식이어야 한다.

따라서 a, b 중 적어도 하나는 0이 아니어야 한다.

즉, $a\neq0$ 또는 $b\neq0$이어야 한다.

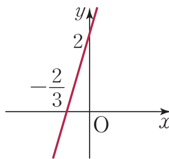
3

목표| 일차방정식 $ax+by+c=0$의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $3x-y+2=0$에서

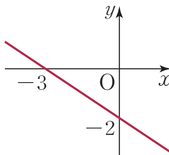
$y=3x+2$

기울기가 3, y절편이 2이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



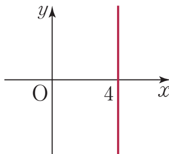
(2) $2x+3y+6=0$에서 $y=-\frac{2}{3}x-2$

기울기가 $-\frac{2}{3}$, y절편이 -2이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



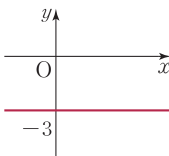
(3) $2x-8=0$에서 $x=4$

x절편이 4이고, y축에 평행한 직선이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(4) $3y+9=0$에서 $y=-3$

y절편이 -3이고, x축에 평행한 직선이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



교과서 150 쪽

거꾸로 x, y에 대한 일차방정식

$$ax+by+c=0\ (a\neq0 \text{ 또는 } b\neq0) \qquad \cdots\cdots ①$$

의 그래프는 직선이 됨을 알아보자.

(i) $a\neq0$, $b\neq0$일 때, 일차방정식 ①은 일차함수

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

의 꼴로 변형된다. 이것은 기울기가 $-\frac{a}{b}$이고, y절편이 $-\frac{c}{b}$인 직선을 나타낸다.

(ii) $a\neq0$, $b=0$일 때, 일차방정식 ①은 $ax+c=0$이다. 그런데 $a\neq0$이므로

$$x=-\frac{c}{a}$$

의 꼴로 변형된다. 이것은 x절편이 $-\frac{c}{a}$이고, y축에 평행한 직선을 나타낸다.

(iii) $a=0$, $b\neq0$일 때, 일차방정식 ①은 $by+c=0$이다. 그런데 $b\neq0$이므로

$$y=-\frac{c}{b}$$

의 꼴로 변형된다. 이것은 y절편이 $-\frac{c}{b}$이고, x축에 평행한 직선을 나타낸다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 x, y에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$ $(a\neq0$ 또는 $b\neq0)$의 그래프는 항상 직선임을 알 수 있다.

● 방정식 $x=m$의 그래프 (y, $x=m$, O, m, x)

● 방정식 $y=n$의 그래프 (y, n, $y=n$, O, x)

보기 (1) 일차방정식 $2x-y+5=0$은 일차함수 $y=2x+5$로 변형되므로 기울기가 2이고, y절편이 5인 직선을 나타낸다.

(2) 일차방정식 $2x+5=0$은 $x=-\frac{5}{2}$로 변형되므로 x절편이 $-\frac{5}{2}$이고, y축에 평행한 직선을 나타낸다.

(3) 일차방정식 $-y+5=0$은 $y=5$로 변형되므로 y절편이 5이고, x축에 평행한 직선을 나타낸다.

문제 3 다음 일차방정식의 그래프를 그려라.

(1) $3x-y+2=0$　　(2) $2x+3y+6=0$

(3) $2x-8=0$　　(4) $3y+9=0$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

x년도의 지구의 평균 기온을 y ℃라고 할 때, 최근 몇 년간 x, y에 대한 관계식을 그래프로 나타내면 직선이 된다고 하자. 2000년의 평균 기온은 10.5 ℃, 2010년의 평균 기온은 10.7 ℃라고 할 때, 이 직선의 방정식을 구하여라.

단원 과제

목표| 연도와 지구의 평균 기온을 순서쌍으로 만들어 좌표평면 위에 나타내어 두 점을 지나는 직선의 방정식을 실생활 문제에서 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 점 $(2000,\ 10.5)$, $(2010,\ 10.7)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-10.5=\frac{0.2}{10}(x-2000)$$

$$\boldsymbol{y=0.02x-29.5}$$

지/도/자/료

직선의 방정식을 $y=mx+n$의 꼴로 나타내는 경우에는 직선의 기울기와 y절편을 바로 알 수 있으므로 직선의 형태를 쉽게 짐작할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 이 경우에는 y축에 평행한 직선을 나타낼 수 없다는 단점이 있다.

직선의 방정식을 $ax+by+c=0$의 꼴로 나타내는 경우에는 좌표평면 위의 모든 직선을 나타낼 수 있다는 장점이 있다. 그러나 이 경우에는 기울기와 y절편을 바로 알 수 없으므로 직선의 형태를 쉽게 짐작할 수 없고, 직선의 방정식이 유일하지 않다는 단점이 있다. 예를 들어 방정식 $2x-y+3=0$과 $4x-2y+6=0$은 같은 직선을 나타낸다.

교과서 151 쪽

02 두 직선의 평행과 수직

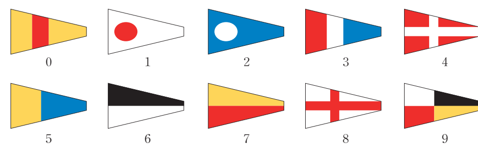
● 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이해한다.
● 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.

두 직선이 평행하기 위한 조건은 무엇인가?

생각 열기

국제신호기

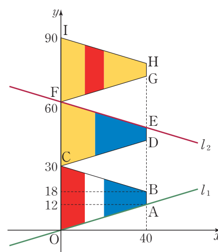
국제신호기는 세계 공통 신호법으로 규정되어 선박과 선박 또는 선박과 육지 사이에 통신을 주고받을 때 사용하는 기를 말한다. 다음 그림은 국제신호기의 한 종류인 숫자 0부터 9까지의 숫자기이다.



탐구 활동

오른쪽 그림은 숫자 0, 5, 3을 나타내는 국제신호기를 좌표평면 위에 올려놓은 것이다. 세 국제신호기가 합동인 등변사다리꼴일 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 직선 l_1과 평행한 선분을 모두 찾아보자.
2. 직선 l_1의 기울기를 구하여 보자.
3. 직선 l_2와 평행한 선분을 모두 찾아보자.
4. 직선 l_2의 기울기를 구하여 보자.



❶ 중① 평면에서 두 직선의 위치 관계
(i) 한 점에서 만난다.
(ii) 평행하다.
(iii) 일치한다.

좌표평면 위에서 두 직선

$$l: y=mx+n,\ l': y=m'x+n'$$

이 평행할 조건을 알아보자.

생각 열기 참/고/자/료

국제신호기(international signal flag)는 선박과 선박 사이의 교신뿐만 아니라 선박과 항공기, 선박과 육상신호소 사이의 교신에 국제적으로 사용하는 신호기를 의미한다.
오늘날 사용되는 국제신호기는 1934년부터 사용되었던 것으로서 국제선박신호조사위원회가 편집한 국제통신서에 의하여 기(旗)의 종류 · 사용법 · 신호문 등이 규정되어 있다.
기의 종류는 영어의 알파벳기 A부터 Z까지 26개, 0부터 9까지의 숫자기 10개, 대표기 3개, 회답기 1개로 모두 40개이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 국제신호기라는 실생활 소재를 이용하여 좌표평면에서 두 직선이 평행일 때의 조건을 발견하는 토대가 되도록 한다.

1. 선분 CD, 선분 FG

2. 직선 l_1은 두 점 $(0,\ 0)$, $(40,\ 12)$를 지나는 직선이므로 기울기는

$$\frac{12-0}{40-0}=\mathbf{\frac{3}{10}}$$

3. 선분 CB, 선분 IH

4. 직선 l_2는 두 점 $(0,\ 60)$, $(40,\ 48)$을 지나는 직선이므로 기울기는

$$\frac{48-60}{40-0}=\mathbf{-\frac{3}{10}}$$

02 두 직선의 평행과 수직

소단원 지도 목표

① 두 직선이 평행할 조건과 일치할 조건을 이해하고 이를 활용하게 한다.
② 두 직선이 수직일 조건을 이해하고 이를 활용하게 한다.
③ 좌표평면에서 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.
④ 좌표평면에서 평행한 두 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

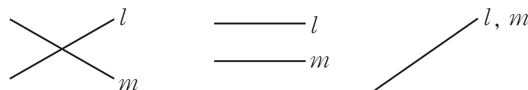
1. 두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 알아보려면 기울기를 쉽게 알 수 있도록 주어진 방정식을 $y=mx+n$의 형태로 나타내도록 지도한다.

2. 기울기가 같은 두 직선의 위치 관계는 평행한 경우와 일치하는 경우가 있음을 이해하게 한다.

3. 두 직선이 수직일 조건을 구하는 과정은 간단히 설명하고, 그 결과를 활용하는 데 중점을 두어 지도한다.

본문 해설

❶ 평면에서 두 직선의 위치 관계는 다음과 같다.
(i) 한 점에서 만난다. (ii) 평행하다. (iii) 일치한다.



특히 한 평면에서 두 직선 l, m이 평행할 때, 이를 기호로 $l /\!/ m$과 같이 나타내며 두 직선 l, m은 서로 만나지 않는다.
한편 한 평면에서 두 직선 l, m이 90°를 이루며 한 점에서 만날 때 두 직선 l, m은 서로 수직으로 만난다고 하며 이를 기호로 $l \perp m$과 같이 나타낸다.

교과서 152 쪽

❶ 오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, l'이 평행하면 두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 서로 같고, y절편은 서로 다르다. 즉, 기울기는 같고, y절편은 다르므로

$$m=m',\ n\neq n'$$

이다. 거꾸로 $m=m'$, $n\neq n'$이면 두 직선 l, l'은 평행하다.

한편 두 직선 l, l'이 일치하면 기울기와 y절편이 각각 같으므로 $m=m'$, $n=n'$이다. 거꾸로 $m=m'$, $n=n'$이면 두 직선 l, l'은 일치한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 직선의 평행과 일치

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$에 대하여

(1) 두 직선이 평행하면 $m=m'$, $n\neq n'$이다. 또 $m=m'$, $n\neq n'$이면 두 직선은 평행하다.

(2) 두 직선이 일치하면 $m=m'$, $n=n'$이다. 또 $m=m'$, $n=n'$이면 두 직선은 일치한다.

보기 (1) 두 직선 $y=2x-1$, $y=2x+1$은 평행하다.

(2) 두 직선 $y=-x+2$, $x+y-2=0$은 일치한다.

문제 1 보기 중에서 다음을 만족시키는 직선을 모두 찾아라.

보기

㉠ $y=-3x+1$	㉡ $y=3x-4$	㉢ $3x+y-7=0$
㉣ $y=\frac{1}{5}x+1$	㉤ $x-5y+3=0$	㉥ $x+3y-6=0$

(1) 직선 $y=-3x-1$과 평행한 직선

(2) 직선 $x-5y+5=0$과 일치하는 직선

예제 01 점 $(-3,\ 1)$을 지나고, 직선 $y=2x+1$에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

● 두 직선이 평행하면 두 직선의 기울기는 같다.

풀이 구하는 직선은 기울기가 2이고, 점 $(-3,\ 1)$을 지나므로

$$y-1=2(x+3),\ y=2x+7$$

답 $y=2x+7$

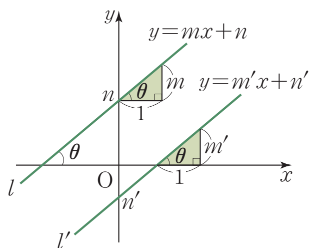
본문 해설

❶ 두 직선이 평행하면 두 직선의 기울기가 같음을 다음과 같은 방법으로 보일 수도 있다.

직선 $y=mx+n$의 기울기 m은

$$m=\frac{(y\text{값의 증가량})}{(x\text{값의 증가량})}$$

이므로 x의 값이 1만큼 증가할 때의 y값의 증가량과 같다.



따라서 두 직선

l: $y=mx+n$

l': $y=m'x+n'$

이 서로 평행하면 위의 그림에서 색칠한 두 삼각형도 서로 합동(ASA 합동)이므로 합동인 두 삼각형의 대응변의 길이에서 $m=m'$이 성립한다.

또 삼각비를 이용하여 직선 l에서 $m=\tan\theta$이고, 직선 l'에서 $m'=\tan\theta$이므로 $m=m'$임을 보일 수도 있다.

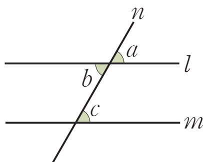
참고| 서로 다른 두 직선 l, m이 한 직선 n과 만날 때

(1) 두 직선 l, m이 평행하면 동위각의 크기는 같다. 즉,

$l /\!/ m$이면 $a=c$

(2) 두 직선 l, m이 평행하면 엇각의 크기는 같다. 즉,

$l /\!/ m$이면 $b=c$



1

목표| 주어진 직선과 평행한 직선, 일치하는 직선을 각각 찾을 수 있게 한다.

풀이| (1) 기울기가 -3이고, y절편이 -1이 아닌 직선은 ㉠, ㉢이다.

(2) 기울기가 $\frac{1}{5}$이고, y절편이 1인 직선은 ㉣이다.

읽/기/자/료 여러 가지 기울기

1. 한옥의 처마

겨울철의 따뜻한 햇살을 잘 받아들이고, 여름철의 뜨거운 햇볕을 막아 주어야 좋은 집이다.

우리 선조들은 한옥의 처마의 길이와 물매(기울기)를 우리나라 각 지방의 위도에 알맞게 고안하여 여름에는 햇볕을 막아 주고, 겨울에는 방안 깊숙이 햇살이 들어오도록 하였다.

2. 도로 표지판

오른쪽 그림은 10 %의 경사를 나타내는 도로 표지판이다.

여기서 10 %의 의미는 수평 거리 100 m에 대하여 수직 거리가 10 m임을 뜻한다.

즉, 수평으로 100 m 움직일 때 수직으로 10 m 올라가거나 내려가는 경사를 뜻한다.

오르막 경사

내리막 경사

교과서 153 쪽

문제 2 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 (2, 5)를 지나고, 직선 $y=x-5$에 평행한 직선

(2) 점 (−1, 2)를 지나고, 직선 $3x-2y+4=0$에 평행한 직선

사고력 기르기

▸추론 / 의사소통 / 문제 해결

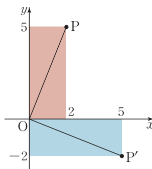
두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 평행하면 등식 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}\neq\frac{c'}{c}$이 성립함을 설명하여 보자. (단, $abc\neq0$, $a'b'c'\neq0$)

두 직선이 수직이기 위한 조건은 무엇인가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 합동인 두 직사각형을 축에 접하도록 놓았을 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 두 직사각형의 대각선 OP, OP′이 이루는 각의 크기는 얼마인가?
2. 두 직사각형의 대각선 OP, OP′의 기울기를 각각 구하고, 그 곱을 구하여 보자.



좌표평면 위에서 두 직선

$$l: y=mx+n,\ \ l': y=m'x+n'$$

이 수직일 조건을 알아보자.

두 직선 l, l'이 수직이면, 두 직선 l, l'에 각각 평행하고 원점을 지나는 두 직선

$$l_1: y=mx,\ \ l_1': y=m'x$$

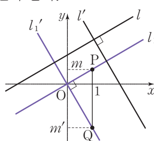
가 수직이다.

따라서 두 직선 l, l'이 수직일 조건은 l_1, l_1'이 수직일 조건과 같다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $x=1$과 두 직선 l_1, l_1'의 교점을 각각 P, Q라고 하면 P(1, m), Q(1, m')이고, 삼각형 OPQ는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2=\overline{PQ}^2 \quad \cdots\cdots ①$$

이다.



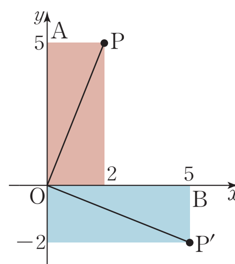
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 직사각형의 두 대각선의 기울기를 살펴봄으로써 수직인 두 직선은 기울기의 곱이 −1임을 발견하는 토대가 되도록 한다.

1. 오른쪽 그림에서 삼각형 AOP와 삼각형 BOP′은 합동이므로 ∠AOP=∠BOP′

따라서 두 대각선 OP, OP′이 이루는 각의 크기는

$\angle POP'=\angle POB+\angle BOP'$
$=\angle POB+\angle AOP$
$=\mathbf{90^\circ}$



2. 대각선 OP의 기울기는 $\frac{5-0}{2-0}=\mathbf{\frac{5}{2}}$

대각선 OP′의 기울기는 $\frac{-2-0}{5-0}=\mathbf{-\frac{2}{5}}$

따라서 두 대각선 OP, OP′의 기울기의 곱은

$\frac{5}{2}\times\left(-\frac{2}{5}\right)=\mathbf{-1}$

2

목표| 한 점을 지나고 주어진 직선과 평행한 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y-5=1\cdot(x-2)$, $\boldsymbol{y=x+3}$

(2) $y-2=\frac{3}{2}\{x-(-1)\}$, $\boldsymbol{y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}}$

사고력 기르기 추론

출제 의도| 일차방정식의 형태로 주어진 두 직선이 평행일 조건을 찾을 수 있게 한다.

풀이| $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

$a'x+b'y+c'=0$에서 $y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$

두 직선이 평행하므로 $-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$, $-\frac{c}{b}\neq-\frac{c'}{b'}$

따라서 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$, $\frac{b'}{b}\neq\frac{c'}{c}$이므로 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}\neq\frac{c'}{c}$

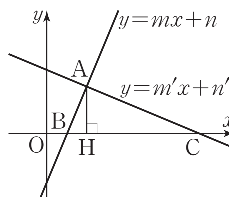
이다.

지/도/자/료

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 서로 수직일 조건은 다음과 같이 삼각형의 닮음을 이용하여 구할 수도 있다.

서로 수직으로 만나는 두 직선의 교점을 A, 두 직선이 x축과 만나는 점을 각각 B, C라고 하자.

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하면



△ABH∽△CAH이므로

$\overline{AH}^2=\overline{BH}\cdot\overline{CH}$

그런데 오른쪽 그림에서

$m=\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$, $m'=-\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}}$

이므로

$mm'=-\frac{\overline{AH}^2}{\overline{BH}\cdot\overline{CH}}=-1$

3

목표| 한 점을 지나고 주어진 직선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y-3=-2(x-2)$, $\boldsymbol{y=-2x+7}$

(2) $y-3=\frac{1}{3}(x-2)$, $\boldsymbol{y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}}$

4

목표| 두 점을 연결한 선분의 수직이등분선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

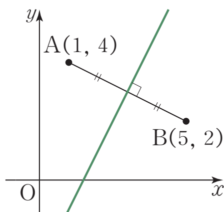
풀이| 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{4+2}{2}\right)$

$=(3,\ 3)$

이고, 기울기는

$\frac{2-4}{5-1}=-\frac{1}{2}$



이므로 선분 AB의 수직이등분선은 기울기가 2이고, 점 $(3,\ 3)$을 지나는 직선이다.
따라서 구하는 방정식은

$y-3=2(x-3)$, $\boldsymbol{y=2x-3}$

교과서 154 쪽

● 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 이다.

여기서

$$\overline{OP}^2=1+m^2,\ \overline{OQ}^2=1+m'^2,\ \overline{PQ}^2=(m-m')^2$$

이므로 이것을 ①에 대입하면

$$(1+m^2)+(1+m'^2)=(m-m')^2$$

이다. 이것을 정리하면

$$mm'=-1$$

이다. 거꾸로 $mm'=-1$이면 ①이 성립하므로 삼각형 OPQ는 직각삼각형이다. 즉, $\overline{OP}\perp\overline{OQ}$이므로 두 직선 l_1, l_1'은 수직이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 직선의 수직
두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$에 대하여 두 직선이 수직이면 $mm'=-1$이다.
또 $mm'=-1$이면 두 직선은 수직이다.

보기 두 직선 $y=2x+1$과 $y=-\frac{1}{2}x+1$은 기울기의 곱이 $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$이므로 서로 수직이다.

예제 02 점 $(3,\ 1)$을 지나고, 직선 $y=2x+5$에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 직선 $y=2x+5$에 수직인 직선의 기울기를 m이라고 하면

$$2m=-1,\ m=-\frac{1}{2}$$

구하는 직선은 점 $(3,\ 1)$을 지나므로 $y-1=-\frac{1}{2}(x-3)$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

답 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

문제 3 점 $(2,\ 3)$을 지나고, 다음 직선에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

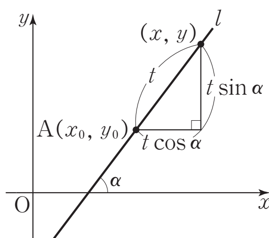
(1) $y=\frac{1}{2}x-3$ (2) $3x+y+2=0$

발전 **문제 4** 두 점 $A(1,\ 4)$, $B(5,\ 2)$에 대하여 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 구하여라.

지/도/자/료 직선의 매개변수 방정식

정점 $A(x_0,\ y_0)$을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α라고 하면 직선 l의 매개변수 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\sin\alpha \end{cases}$$



예를 들어 점 $(2,\ -1)$을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $30°$인 직선의 매개변수 방정식은

$$\begin{cases} x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=-1+\frac{1}{2}t \end{cases}$$

이다.

사고력 기르기 추론

출제 의도| 일차방정식의 형태로 주어진 두 직선이 수직일 조건을 찾을 수 있게 한다.

풀이| $ax+by+c=0$에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

$a'x+b'y+c'=0$에서 $y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}$

두 직선이 수직이므로 $\left(-\frac{a}{b}\right)\times\left(-\frac{a'}{b'}\right)=-1$

따라서 $aa'+bb'=0$이다.

참고| 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$에서 $abc\neq0$, $a'b'c'\neq0$일 때

(1) 두 직선이 한 점에서 만나는 경우 $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$

(2) 두 직선이 평행한 경우 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

(3) 두 직선이 일치하는 경우 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

(4) 두 직선이 수직으로 만나는 경우 $aa'+bb'=0$

사고력 기르기

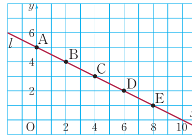
▸추론
의사소통
문제 해결

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 수직이면 등식 $aa'+bb'=0$이 성립함을 설명하여 보자. (단, $ab\neq0$, $a'b'\neq0$)

점과 직선 사이의 거리를 어떻게 구하는가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 직선 l: $x+2y=10$ 위에 점 A, B, C, D, E가 있다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 점 A, B, C, D, E의 좌표와 원점 O까지의 거리를 각각 구하고, 이 중에서 원점 O까지의 거리가 가장 가까운 점은 어느 것인지 알아보자.
2. 1에서 구한 점과 원점을 지나는 직선을 m이라고 할 때, 두 직선 l, m의 기울기 사이의 관계를 말하여 보자.
3. 1에서 구한 점이 직선 l 위의 모든 점 중에서 원점 O까지의 거리가 가장 가까운 점이라고 말할 수 있는가?

❶ 점 P와 직선 l 사이의 거리는 점 P와 직선 l 위의 임의의 점 Q 사이의 거리 중에서 최솟값과 같다.

한 점 P와 한 직선 l 사이의 거리는 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 길이를 말한다.

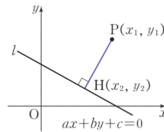
❷ 좌표평면 위에서 한 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 점 P를 지나지 않는 직선

$$l: ax+by+c=0 \ (a\neq0 \text{ 또는 } b\neq0)$$

사이의 거리를 구하여 보자.

(i) $a\neq0$, $b\neq0$일 때

점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x_2, y_2)$라고 하면 직선 l의 기울기는 $-\frac{a}{b}$이므로 직선 PH는 기울기가 $\frac{b}{a}$이고, 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$을 지난다.



따라서 직선 PH의 방정식은

$$y-y_1=\frac{b}{a}(x-x_1)$$

이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 이 탐구 활동은 주어진 직선 위에 있는 몇 개의 점에서 원점까지의 거리를 구해 보고, 직선 위의 점 중에서 원점까지의 거리가 최소인 점을 찾아 그 특징에 대하여 알아보도록 하기 위한 것이다.

1. $\overline{\mathrm{OA}}=5$, $\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{OC}}=5$, $\overline{\mathrm{OD}}=2\sqrt{10}$, $\overline{\mathrm{OE}}=\sqrt{65}$
따라서 원점 O까지의 거리가 가장 가까운 점은 **B**이다.

2. 직선 l의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고, 두 점 O, B를 지나는 직선 m의 기울기는 $\frac{4-0}{2-0}=2$이므로

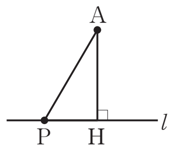
$$\left(-\frac{1}{2}\right)\times2=-1$$

이다. 즉, **두 직선 l, m의 기울기의 곱은 -1이다.**

3. 직선 OB가 직선 l에 수직이므로 점 B는 직선 l 위의 모든 점 중에서 원점까지의 거리가 **가장 가까운 점이라고 할 수 있다.**

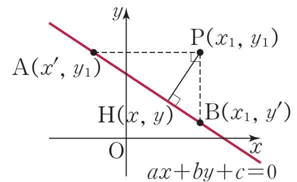
본문 해설

❶ 오른쪽 그림과 같이 한 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H, 직선 l 위의 H가 아닌 임의의 점을 P라고 하면 선분 AP는 직각삼각형 APH의 빗변이므로 $\overline{\mathrm{AP}}>\overline{\mathrm{AH}}$
즉, $\overline{\mathrm{AH}}$가 점 A에서 직선 l까지의 최단 거리이다.



❷ 점과 직선 사이의 거리는 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다.

(1) 직선 $ax+by+c=0$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(x', y_1)$, $\mathrm{B}(x_1, y')$을 잡으면



$ax'+by_1+c=0$, $ax_1+by'+c=0$
이므로 $a\neq0$, $b\neq0$이면

$$x_1-x'=\frac{ax_1+by_1+c}{a}$$

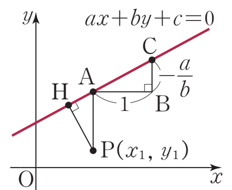
$$y_1-y'=\frac{ax_1+by_1+c}{b}$$

이때 $\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BP}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{BP}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{|x_1-x'||y_1-y'|}{\sqrt{(x_1-x')^2+(y_1-y')^2}}$$

$$=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(2) 직각삼각형 ABC에서



$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{1+\left(-\frac{a}{b}\right)^2}$이고,

$\mathrm{A}\left(x_1, -\frac{a}{b}x_1-\frac{c}{b}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\left|-\frac{a}{b}x_1-\frac{c}{b}-y_1\right|$

$\triangle\mathrm{PHA}$와 $\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{AC}}$

$$\overline{\mathrm{PH}}=\frac{\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{\left|-\frac{a}{b}x_1-\frac{c}{b}-y_1\right|}{\sqrt{1+\left(-\frac{a}{b}\right)^2}}$$

$$=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

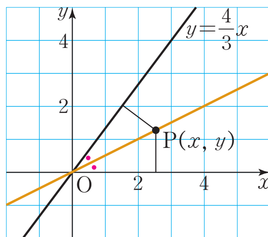
지/도/자/료

두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선

각의 이등분선 위의 한 점에서 각 변에 이르는 거리가 같으므로 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 두 직선이 이루는 각의 이등분선의 방정식을 구할 수 있다.

이때 각의 이등분선은 서로 수직인 두 개의 직선을 얻을 수 있다.

예를 들어 두 직선 $y=0$과 $y=\frac{4}{3}x$가 이루는 예각을 이등분하는 직선의 방정식을 구하여 보자.



각의 이등분선 위에 있는 임의의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면, 점 P에서 두 직선에 이르는 거리는 서로 같다.

그런데 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 직선 $y=0$에 이르는 거리는 $|y|$이고, 직선 $4x-3y=0$에 이르는 거리는

$\frac{|4x-3y|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$이므로

$$|y|=\frac{|4x-3y|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}},\quad 5|y|=|4x-3y|$$

절댓값 기호를 없애면 $5y=\pm(4x-3y)$

즉, $y=\frac{1}{2}x$ 또는 $y=-2x$이다.

여기에서 기울기가 양인 것은 $y=\frac{1}{2}x$이다.

따라서 두 직선 $y=0$과 $y=\frac{4}{3}x$가 이루는 예각을 이등분하는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이다.

교과서 156 쪽

이때 점 H는 직선 l과 직선 PH의 교점이므로 다음 연립방정식이 성립한다.

$$\begin{cases} ax_2+by_2+c=0 & \cdots\cdots ① \\ y_2-y_1=\frac{b}{a}(x_2-x_1) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②의 양변에 a를 곱하여 정리하면

$$bx_2-ay_2-bx_1+ay_1=0 \quad \cdots\cdots ③$$

이다. ①$\times a+$③$\times b$를 하여 정리하면

$$x_2=\frac{b^2x_1-aby_1-ac}{a^2+b^2}$$

이고, 양변에서 x_1을 뺀 후 우변을 정리하면

$$x_2-x_1=\frac{-a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2} \quad \cdots\cdots ④$$

이다. ④를 ②에 대입하면

$$y_2-y_1=\frac{-b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$

이다.

따라서 구하는 선분 PH의 길이는

$$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(ax_1+by_1+c)^2}{(a^2+b^2)^2}}$$
$$=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

이다.

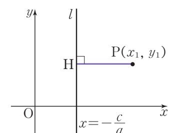
임의의 실수 a에 대하여 $\sqrt{a^2}=|a|$

(ii) $a\neq0$, $b=0$일 때 (직선이 y축과 평행한 경우)

직선의 방정식은 $x=-\frac{c}{a}$이므로

$$\overline{\mathrm{PH}}=\left|x_1-\left(-\frac{c}{a}\right)\right|=\left|\frac{ax_1+c}{a}\right|$$

이다. 이것은 ⑤에 $b=0$을 대입한 것과 같다.

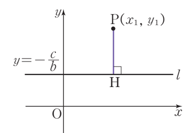


(iii) $a=0$, $b\neq0$일 때 (직선이 x축과 평행한 경우)

직선의 방정식은 $y=-\frac{c}{b}$이므로

$$\overline{\mathrm{PH}}=\left|y_1-\left(-\frac{c}{b}\right)\right|=\left|\frac{by_1+c}{b}\right|$$

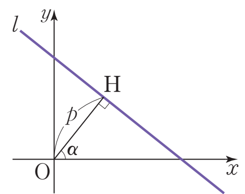
이다. 이것은 ⑤에 $a=0$을 대입한 것과 같다.



읽/기/자/료 헤세의 표준형

원점 O에서 직선 l에 그은 수선 OH의 길이를 p, 직선 OH가 x축과 이루는 각의 크기를 α라고 하면 점 H의 좌표는

$(p\cos\alpha,\ p\sin\alpha)$



이고, 직선 OH의 기울기는 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$이다.

따라서 직선 l은 점 $\mathrm{H}(p\cos\alpha,\ p\sin\alpha)$를 지나고 기울기가 $-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$인 직선이므로 직선 l의 방정식은

$$y-p\sin\alpha=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(x-p\cos\alpha)$$

$$y\sin\alpha-p\sin^2\alpha=-x\cos\alpha+p\cos^2\alpha$$

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p\sin^2\alpha+p\cos^2\alpha$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로 $\quad x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$

이것을 헤세(Hesse)의 표준형이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ 원점 (0, 0)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

보기 점 (4, −1)과 직선 $3x-4y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\times4-4\times(-1)+4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{20}{5}=4$$

문제 5 다음 점과 직선 사이의 거리를 구하여라.

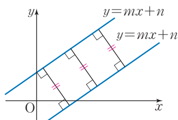
(1) (3, 2), $x+2y+3=0$ (2) (0, 0), $4x-3y+10=0$

(3) (−1, −2), $3x-y-4=0$ (4) (−4, 1), $x+2=0$

점과 직선 사이의 거리를 이용하여 평행한 두 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.

두 직선이 평행하면 한 직선 위의 임의의 점에서 다른 직선에 내린 수선의 길이는 항상 일정하다.

따라서 평행한 두 직선 사이의 거리는 직선 위의 한 점과 다른 직선 사이의 거리이다.



예제 03 평행한 두 직선 $x-2y+2=0$과 $x-2y-6=0$ 사이의 거리를 구하여라.

풀이 두 직선이 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-2y+2=0$ 위의 한 점 (0, 1)과 직선 $x-2y-6=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는 $\dfrac{|1\times0-2\times1-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt5}=\dfrac{8\sqrt5}{5}$이다. 답 $\dfrac{8\sqrt5}{5}$

❷ **문제 6** 다음 평행한 두 직선 사이의 거리를 구하여라.

(1) $x-y+3=0$, $x-y+7=0$ (2) $5x-y-2=0$, $5x-y+8=0$

본문 해설

❶ 원점 (0, 0)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|a\cdot0+b\cdot0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

5

목표| 좌표평면에서 한 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\dfrac{|1\times3+2\times2+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{10}{\sqrt5}=\mathbf{2\sqrt5}$

(2) $\dfrac{|4\times0+(-3)\times0+10|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{10}{5}=\mathbf{2}$

(3) $\dfrac{|3\times(-1)+(-1)\times(-2)-4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$

$=\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$

(4) $\dfrac{|1\times(-4)+0\times1+2|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\dfrac{2}{1}=\mathbf{2}$

본문 해설

❷ 평행한 두 직선

$ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$

사이의 거리는 직선 $ax+by+c=0$ 위의 한 점 $\left(-\dfrac{c}{a}, 0\right)$과 직선 $ax+by+c'=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$\frac{\left|a\times\left(-\frac{c}{a}\right)+b\times0+c'\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c'-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

6

목표| 좌표평면에서 평행한 두 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 두 직선 $x-y+3=0$, $x-y+7=0$ 사이의 거리는 직선 $x-y+3=0$ 위의 한 점 (0, 3)과 직선 $x-y+7=0$ 사이의 거리와 같다.

$\dfrac{|1\times0-1\times3+7|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt2}=\mathbf{2\sqrt2}$

(2) 두 직선 $5x-y-2=0$, $5x-y+8=0$ 사이의 거리는 직선 $5x-y-2=0$ 위의 한 점 (0, −2)와 직선 $5x-y+8=0$ 사이의 거리와 같다.

$\dfrac{|5\times0-1\times(-2)+8|}{\sqrt{5^2+(-1)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{26}}=\mathbf{\dfrac{5\sqrt{26}}{13}}$

7

목표| 좌표평면에서 주어진 조건을 만족시키는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 구하는 직선의 기울기를 m이라고 하면 $y-(-2)=m\{x-(-1)\}$에서

$mx-y+m-2=0$ ...... ①

원점과 직선 $mx-y+m-2=0$ 사이의 거리가 2이므로

$\dfrac{|m\times0-1\times0+m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

$|m-2|=2\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2-4m+4=4m^2+4,\ 3m^2+4m=0$

$m(3m+4)=0$

따라서 $m=0$ 또는 $m=-\dfrac{4}{3}$이다.

이것을 ①에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$\boldsymbol{y=-2}$ **또는** $\boldsymbol{y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{10}{3}}$

(2) 기울기가 2인 직선의 방정식의 y절편을 b라고 하면 $y=2x+b$에서

$2x-y+b=0$ ...... ①

점 $(1,\ 2)$와 직선 $2x-y+b=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$\dfrac{|2\times1-1\times2+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{10},\ |b|=5\sqrt{2},\ b=\pm5\sqrt{2}$

이것을 ①에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$\boldsymbol{y=2x\pm5\sqrt{2}}$

교과서 158 쪽

예제 04 점 $(2,\ 1)$을 지나고, 원점과의 거리가 1인 직선의 방정식을 구하여라.

풀이 구하는 직선의 기울기를 m이라고 하면 직선의 방정식은

$y-1=m(x-2)$ ......①

우변을 전개하여 정리하면 $mx-y-2m+1=0$

원점과 직선 $mx-y-2m+1=0$ 사이의 거리가 1이므로

$\dfrac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

$|-2m+1|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2-4m+1=m^2+1$

$3m^2-4m=0$

$m(3m-4)=0$

따라서 $m=0$ 또는 $m=\dfrac{4}{3}$이다.

이것을 ①에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$y=1$ 또는 $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}$

답 $y=1$ 또는 $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}$

문제 7 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $(-1,\ -2)$를 지나고, 원점과의 거리가 2인 직선

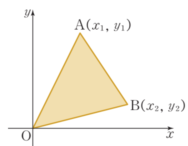
(2) 점 $(1,\ 2)$와의 거리가 $\sqrt{10}$이고, 기울기가 2인 직선

창의 up

세 점 $O(0,\ 0)$, $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이를 S라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 점 O와 직선 AB 사이의 거리를 구하여라.

(2) $S=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$임을 보여라.



창의 UP

출제 의도| 좌표평면에서 두 점 사이의 거리, 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 직선 AB의 방정식은

$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-(x_1y_2-x_2y_1)=0$

따라서 원점과 직선 AB 사이의 거리는

$\dfrac{|-(x_1y_2-x_2y_1)|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}=\boldsymbol{\dfrac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}}$

(2) 선분 AB를 삼각형 OAB의 밑변으로 하면 높이는 점 O와 직선 AB 사이의 거리이므로 삼각형 OAB의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\times\dfrac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

참고| 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 다음과 같이 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 구할 수 있다.

선분 AB를 삼각형 ABC의 밑변으로 하면 높이는 점 C와 직선 AB 사이의 거리이므로 삼각형 ABC의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$\times\dfrac{|(y_2-y_1)x_3-(x_2-x_1)y_3-(x_1y_2-x_2y_1)|}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$

$=\dfrac{1}{2}|(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)-(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)|$

중단원 기초

[해답 p.229]

수준별 학습

1 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $(3,\ -1)$을 지나고, 기울기가 3인 직선

(2) 점 $(-2,\ 4)$를 지나고, x축에 평행한 직선

01 직선의 방정식 — 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

2 다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

(1) $(-2,\ -3)$, $(2,\ 5)$

(2) $(-1,\ 1)$, $(5,\ 4)$

01 직선의 방정식 — 두 점을 지나는 직선의 방정식

3 두 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$, $y=ax+1$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 두 직선이 평행할 때, 상수 a의 값

(2) 두 직선이 수직일 때, 상수 a의 값

02 두 직선의 평행과 수직

4 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $(1,\ 3)$을 지나고, 직선 $y=5x-3$에 평행한 직선

(2) 점 $(-2,\ 1)$을 지나고, 직선 $y=-3x+1$에 수직인 직선

02 두 직선의 평행과 수직

5 다음 점과 직선 사이의 거리를 구하여라.

(1) $(2,\ 3)$, $3x-y-4=0$

(2) $(0,\ 0)$, $x-2y+5=0$

02 두 직선의 평행과 수직 — 점과 직선 사이의 거리

중/단/원 기초

1

목표| 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y-(-1)=3(x-3)$, $\boldsymbol{y=3x-10}$

(2) 점 $(-2,\ 4)$를 지나고, 기울기가 0인 직선이므로

$y-4=0\{x-(-2)\}$, $\boldsymbol{y=4}$

2

목표| 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y-(-3)=\frac{5-(-3)}{2-(-2)}\{x-(-2)\}$, $\boldsymbol{y=2x+1}$

(2) $y-1=\frac{4-1}{5-(-1)}\{x-(-1)\}$, $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

3

목표| 두 직선이 평행일 조건과 수직일 조건을 알게 한다.

풀이| 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로

(1) 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$과 평행한 직선의 기울기는 $a=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) 직선 $y=\frac{1}{2}x+3$과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}\times a=-1$에서 $a=\boldsymbol{-2}$

4

목표| 한 점을 지나고 주어진 직선과 평행 또는 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 점 $(1,\ 3)$을 지나고 기울기가 5인 직선이므로

$y-3=5(x-1)$, $\boldsymbol{y=5x-2}$

(2) 점 $(-2,\ 1)$을 지나고, 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선이므로

$y-1=\frac{1}{3}\{x-(-2)\}$, $\boldsymbol{y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}}$

5

목표| 좌표평면에서 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{|3\times2-1\times3-4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{10}}$

(2) $\frac{|1\times0-2\times0+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

교과서 160 쪽

중단원 기본

[해답 p.229]

수준별 학습

1 점 (2, 2)를 지나고 기울기가 -2인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하여라.

01 직선의 방정식
한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

2 세 점 A(1, 9), B(a, 5), C(4, a)가 한 직선 위에 있도록 하는 a의 값과 그때의 직선의 방정식을 각각 구하여라.

01 직선의 방정식
두 점을 지나는 직선의 방정식

3 두 직선 $x+y+1=0$과 $2x+3y+5=0$의 교점과 점 (4, 1)을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

01 직선의 방정식
두 점을 지나는 직선의 방정식

4 두 직선 $3x+2y+5=0$과 $ax+by+1=0$이 수직으로 만날 때, 상수 a, b에 대하여 $\frac{a}{b}$의 값을 구하여라.

02 두 직선의 평행과 수직

5 평행한 두 직선 $2x+y-3=0$과 $2x+y+2=0$ 사이의 거리를 구하여라.

02 두 직선의 평행과 수직
두 직선 사이의 거리

중/단/원 기본

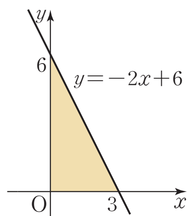
1

목표| 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 (2, 2)를 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은

$y-2=-2(x-2)$

$y=-2x+6$



오른쪽 그림에서 이 직선의 x절편은 3, y절편은 6이므로

구하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times3\times6=\mathbf{9}$

2

목표| 두 점을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 A, B, C가 한 직선 위에 있을 때, 직선 AB와 직선 AC의 기울기는 같으므로

$\frac{5-9}{a-1}=\frac{a-9}{4-1}$에서 $(a-7)(a-3)=0$

따라서 $\boldsymbol{a=7}$ **또는** $\boldsymbol{a=3}$이다.

(i) $a=7$일 때, 구하는 직선의 방정식은

$y-9=\frac{5-9}{7-1}(x-1)$, $\boldsymbol{y=-\frac{2}{3}x+\frac{29}{3}}$

(ii) $a=3$일 때, 구하는 직선의 방정식은

$y-9=\frac{5-9}{3-1}(x-1)$, $\boldsymbol{y=-2x+11}$

3

목표| 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 방정식 $x+y+1=0$, $2x+3y+5=0$을 연립하면

$x=2$, $y=-3$

따라서 주어진 두 직선의 교점 $(2, -3)$과 점 $(4, 1)$을 지나는 직선의 방정식은 $\boldsymbol{y=2x-7}$

4

목표| 두 직선이 수직일 조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $3x+2y+5=0$에서

$y=-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$ ······ ①

$ax+by+1=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}$ ······ ②

①, ②가 서로 수직으로 만나므로

$-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)=-1$에서 $\frac{a}{b}=\boldsymbol{-\frac{2}{3}}$

5

목표| 좌표평면에서 평행한 두 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| 평행한 두 직선 사이의 거리는 일정하므로 한 직선 위의 임의의 점과 다른 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

직선 $2x+y-3=0$ 위의 한 점 $(0, 3)$에서 직선 $2x+y+2=0$까지의 거리는

$\frac{|2\times0+1\times3+2|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

교과서 161 쪽

중단원 실력

[해답 p.229]

수준별 학습

1 직선 $y=m(x+1)+2$가 두 점 A(0, 3), B(3, 0)을 이은 선분 AB와 만날 때, 상수 m값의 범위를 구하여라.

01 직선의 방정식 — 두 점을 지나는 직선의 방정식

2 세 점 A(−3, −1), B(1, 6), C(5, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하고, 점 A를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

01 직선의 방정식 — 두 점을 지나는 직선의 방정식

3 네 점 A(−3, 3), B(−1, −1), C(5, −1), D(5, 3)을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD가 있다. 사각형 ABCD의 내부의 점 P에 대하여

$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP}$

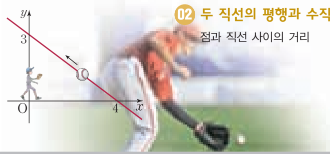
의 값이 최소가 되도록 하는 점 P의 좌표를 구하여라.

01 직선의 방정식 — 두 점을 지나는 직선의 방정식

4 두 직선 $2x+y+2=0$과 $x-2y+1=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구하여라.

02 두 직선의 평행과 수직 — 점과 직선 사이의 거리

5 야구 경기 중에 수비수의 옆으로 공이 직선으로 굴러가고 있다. 수비수의 위치를 원점으로 하여 좌표평면 위에 나타내었더니 공이 (4, 0)과 (0, 3)을 지난다. 공이 수비수에게 가장 가까이 왔을 때, 공과 수비수 사이의 거리는 얼마인지 구하여라.



02 두 직선의 평행과 수직 — 점과 직선 사이의 거리

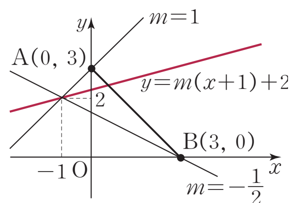
중/단/원 실력

1

목표| 좌표평면에서 두 직선이 한 점에서 만날 조건을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 직선 $y=m(x+1)+2$는 m의 값에 관계없이 점 $(-1, 2)$를 지난다.

오른쪽 그림에서 직선 $y=m(x+1)+2$가 선분 AB와 만나는 기울기 m의 범위는 $\mathbf{-\frac{1}{2}\le m\le 1}$



2

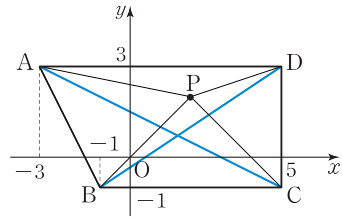
목표| 삼각형의 넓이를 이등분하고, 한 꼭짓점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 구하는 직선은 선분 BC의 중점의 좌표 (3, 3)을 지나야 하므로 $\mathbf{y=\frac{2}{3}x+1}$

3

목표| 두 점을 지나는 직선의 방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이|



사각형 ABCD의 내부의 점 P에 대하여

$\overline{AP}+\overline{CP}\ge\overline{AC}$, $\overline{BP}+\overline{DP}\ge\overline{BD}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP}\ge\overline{AC}+\overline{BD}$

즉, $\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP}+\overline{DP}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P는 직선 AC와 직선 BD의 교점이다.

두 직선 AC와 BD의 방정식은 각각

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, $y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

이 두 방정식을 연립하여 풀면

$x=\frac{11}{7}$, $y=\frac{5}{7}$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\mathbf{P\left(\frac{11}{7}, \frac{5}{7}\right)}$이다.

4

목표| 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 각을 이등분하는 직선 위의 점을 $P(a, b)$라고 하면

$\frac{|2a+b+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|a-2b+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$

$|2a+b+2|=|a-2b+1|$

$a+3b+1=0$ 또는 $3a-b+3=0$

점 $P(a, b)$는 위의 식을 항상 만족시키므로 구하는 직선의 방정식은 $\mathbf{x+3y+1=0}$ **또는** $\mathbf{3x-y+3=0}$

5

목표| 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 두 점 (4, 0)과 (0, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$3x+4y-12=0$

따라서 구하는 거리는 $\frac{|3\times0+4\times0-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\mathbf{\frac{12}{5}}$

3 원의 방정식

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

② 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해하게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 원의 방정식	원의 방정식
02 원과 직선의 위치 관계	좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계
	기울기가 주어진 원의 접선의 방정식
	한 점을 지나는 원의 접선의 방정식
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 162 쪽

3 원의 방정식

산업용 로봇이 인간을 대신한다.

컴퓨터의 통제에 의하여 일정한 공정 작업을 하는 공업용 기계를 산업용 로봇이라고 한다. 산업용 로봇은 1미터의 100만분의 1인 마이크로미터 단위의 작업이나 심해 및 우주 공간에서의 작업 등과 같이 인간이 하기 힘든 일에 쓰이고 있다. 또한 단조로운 반복 작업을 대신하거나 부주의로 생기기 쉬운 제품의 불량을 줄이는 일에도 이용된다.

들어가면서 도로 위 맨홀의 둥근 뚜껑, 회담에서 흔히 사용되는 원탁테이블, 초자연적 현상인 미스터리 서클(Mystery Circle), 크롭(Crop Circle) 등 우리 주변에서 발견할 수 있는 원 모양은 수도 없이 많다.

이 단원에서는 좌표평면에서 원의 방정식을 구하는 방법, 원과 직선 사이의 위치 관계를 지도한 뒤 이를 활용하여 원의 접선의 방정식과 실생활에서 접할 수 있는 문제를 해결할 수 있게 한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 원의 방정식을 구할 수 있다.	상	원의 정의로부터 원의 방정식을 이끌어 내고, 다양한 조건에서 원의 방정식을 구할 수 있다.
	중	원의 방정식의 일반형 $x^2+y^2+ax+by+c=0$으로부터 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.
	하	원의 방정식의 표준형 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$으로부터 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.
2. 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 말할 수 있다.	상	원의 방정식과 직선의 방정식으로부터 원과 직선의 위치 관계를 말할 수 있다.
	중	원과 직선이 한 점에서 만나는 조건을 말할 수 있다.
	하	원과 직선의 위치 관계(두 점에서 만난다, 한 점에서 만난다(접한다), 만나지 않는다.)를 말할 수 있다.
3. 좌표평면에서 원의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	상	원의 접선의 방정식을 추론하고, 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.
	중	원의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
	하	주어진 원과 접하는 직선을 찾을 수 있다.

교과서 163 쪽

01 원의 방정식

● 원의 방정식을 구할 수 있다.

원의 방정식을 어떻게 구하는가?

생각 열기

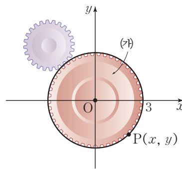
기어

기어란 톱니바퀴로 이루어진 기계 부품으로 2개 또는 그 이상의 축에 회전이나 동력을 전달하는 장치이다. 기어는 시계에 쓰이는 지름 1.5 mm 정도의 작은 것에서부터 선박용 감속 장치 등에 사용되는 수 m에 달하는 것까지 있으며, 차량 등을 비롯한 모든 종류의 기계에 이용된다.

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 톱니바퀴 (가)를 중심이 원점 O와 일치하도록 좌표평면 위에 올려놓았다. 이 톱니바퀴의 가장 바깥 부분을 지나는 원 위의 임의의 점을 $P(x,\ y)$라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 선분 OP의 길이는 얼마인가?
2. 선분 OP의 길이를 x, y에 대한 식으로 나타내어 보자.



● 평면 위의 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 모든 점으로 이루어진 도형을 원이라고 한다. 이때 정점은 원의 중심이고, 원의 중심에서 원 위의 한 점을 이은 선분이 반지름이다.

좌표평면 위에서 한 점 $C(a,\ b)$를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 r인 원을 나타내는 방정식을 구하여 보자.

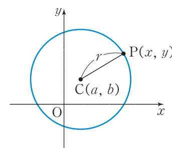
이 원 위의 임의의 점을 $P(x,\ y)$라고 하면 $\overline{CP}=r$이므로

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

이고, 이 식의 양변을 제곱하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.



❶ 거꾸로 방정식 ①을 만족시키는 점 $P(x,\ y)$에 대하여 $\overline{CP}=r$이므로 점 $P(x,\ y)$는 이 원 위에 있다.

따라서 방정식 ①이 구하는 원의 방정식이다.

● 방정식 ①을 중심이 $C(a,\ b)$이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식이라고 한다.

01 원의 방정식

소단원 지도 목표

① 중심의 좌표와 반지름의 길이가 주어진 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

② 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

③ 원의 방정식의 일반형을 보고 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있게 한다.

④ 주어진 방정식이 원을 나타낼 조건을 구할 수 있게 한다.

⑤ 세 점을 지나는 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 좌표평면 위의 한 점에서 같은 거리에 있는 점 $(x,\ y)$의 관계를 방정식으로 나타낸 것이 원의 방정식임을 이해할 수 있도록 지도한다.

2. 원의 방정식은 x와 y에 대한 이차방정식으로 xy항이 없음을 지도한다.

3. 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$의 꼴에서 중심의 좌표와 반지름의 길이는 공식으로 암기하지 않도록 지도한다.

4. 같은 직선 위에 있지 않은 세 점을 지나는 원의 방정식을 구할 때, 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$을 이용하여 구하도록 지도한다.

생각 열기 참 / 고 / 자 / 료

기어는 동력이나 회전의 전달이 확실하며, 정확한 각속도비로 전달할 수 있고, 구조도 비교적 간단하며, 동력 손실도 적고 수명도 긴 장점이 있어 기계 구조에 널리 쓰인다. 기어의 역사는 길다. 기원전 인물인 아르키메데스, 아리스토텔레스, 헤론 등도 기어를 만들어 기계에 응용하였다. 기어를 과학적으로 연구하기 시작한 것은 17세기부터이다. 이때 비로소 수차를 이용한 제분소나 시계의 제작이 본격화됨에 따라 성능이 좋은 기어가 필요하였기 때문이다. 18세기 말 수학자 오일러는 원에 감은 실을 팽팽한 상태로 풀 때 실 끝이 그리는 궤적인 인벌류트 곡선을 이용한 인벌류트 치형을 연구하였다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 톱니바퀴의 중심을 좌표평면의 원점에 두었을 때, 톱니바퀴의 가장자리가 그리는 도형이 원임을 이용하여 원의 방정식을 발견하는 토대가 되도록 한다.

1. 원의 반지름의 길이는 3이므로 $\overline{OP}=\mathbf{3}$

2. 두 점 $O(0,\ 0)$, $P(x,\ y)$ 사이의 거리는 3이므로 $\sqrt{x^2+y^2}=3$, 즉 $\boldsymbol{x^2+y^2=9}$이다.

본문 해설

❶ 반지름 r는 $r>0$이므로 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이면 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$

1

목표| 중심의 좌표와 반지름의 길이가 주어진 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 중심이 점 $(2,\ 5)$이고, 반지름의 길이가 3인 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-5)^2=3^2$

$\mathbf{(x-2)^2+(y-5)^2=9}$

(2) 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 5인 원의 방정식은

$x^2+y^2=5^2$

$\mathbf{x^2+y^2=25}$

교과서 164 쪽

특히 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

● 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 을 원의 방정식의 표준형이라고 한다.

원의 방정식

중심이 $C(a,\ b)$이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

특히 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$x^2+y^2=r^2$$

보기 (1) 중심이 점 $(-3,\ 2)$이고, 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-2)^2=2^2$, $(x+3)^2+(y-2)^2=4$

(2) 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 4인 원의 방정식은

$x^2+y^2=4^2$, $x^2+y^2=16$

문제 1 다음 원의 방정식을 구하여라.

(1) 중심이 점 $(2,\ 5)$이고, 반지름의 길이가 3인 원

(2) 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 5인 원

예제 01 두 점 $A(1,\ 4)$, $B(3,\ -2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하여라.

풀이 구하는 원의 중심을 $C(a,\ b)$라고 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로 $a=\frac{1+3}{2}=2$, $b=\frac{4-2}{2}=1$이다. 즉,

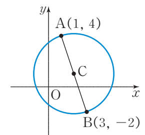
$C(2,\ 1)$

이때 원의 반지름의 길이는

$\overline{AC}=\sqrt{(2-1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{10}$

따라서 구하는 원의 방정식은

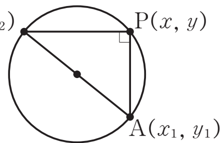
$(x-2)^2+(y-1)^2=10$



답 $(x-2)^2+(y-1)^2=10$

지/도/자/료 지름의 양 끝 점이 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$인 원

지름의 양 끝 점의 좌표가 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ (단, $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$)인 원의 방정식을 구하기 위해 원 위의 한 점을 $P(x,\ y)$라고 하자.



(i) $x\neq x_1$, $x\neq x_2$일 때

$\overleftrightarrow{AP}\perp\overleftrightarrow{BP}$이므로

$(\overleftrightarrow{AP}$의 기울기$)\times(\overleftrightarrow{BP}$의 기울기$)=-1$

$\frac{y-y_1}{x-x_1}\times\frac{y-y_2}{x-x_2}=-1$

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ ……①

(ii) $x=x_1$ 또는 $x=x_2$일 때

$x=x_1$이면 $y=y_2$이고, $x=x_2$이면 $y=y_1$이므로 ①이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 구하는 원의 방정식은

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

읽/기/자/료 원에 대한 개념

원은 평면 위에 있는 한 정점으로부터 일정한 거리를 유지하면서 움직인 점이 그린 그 평면 위에 있는 닫혀진 도형이다. 이 정점을 원의 중심이라고 하며, 원을 이루고 있는 곡선을 원주, 중심과 원주 위의 점을 이은 선분을 반지름이라고 한다.

유클리드(Euclid ; ?B.C. 325~?B.C. 265)는 공리로 '임의의 점을 중심으로 하는 임의의 반지름을 갖는 원을 작도할 수 있다.'고 하였다.

한 원에서 반지름의 길이는 일정하다. 또 원주를 간단히 원이라고도 하며, 반지름이 같은 두 원은 서로 합동이다.

원주에 의하여 평면은 두 부분으로 나뉘어진다. 그중 중심을 포함하고 있는 부분을 원의 내부, 그렇지 않은 부분을 원의 외부라고 한다. 또 내부의 점은 중심으로부터의 거리가 반지름의 길이보다 작은 점이고, 외부의 점은 중심으로부터의 거리가 반지름의 길이보다 큰 점이다.

교과서 165 쪽

문제 2 다음 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하여라.

(1) $(0,\ 2)$, $(-2,\ 2)$　　(2) $(4,\ 0)$, $(0,\ 6)$

(3) $(-3,\ 1)$, $(1,\ 5)$　　(4) $(-5,\ -2)$, $(3,\ 4)$

❶ 원의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 좌변을 전개하여 정리하면

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

이므로 $-2a=A$, $-2b=B$, $a^2+b^2-r^2=C$로 놓으면 위의 원의 방정식은

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0\ (A,\ B,\ C\text{는 상수}) \quad \cdots\cdots ①$$

이 된다.

즉, 원의 방정식은 x^2, y^2의 계수가 같고, xy의 계수가 0인 x, y에 대한 이차방정식의 꼴로 나타낼 수 있다.

거꾸로 방정식 ①을 변형하면

$$\left(x^2+Ax+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+By+\frac{B^2}{4}\right)=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

가 된다.

따라서 $A^2+B^2-4C>0$이면 방정식 ①은 중심이 점 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$인 원을 나타낸다.

● 방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$을 원의 방정식의 일반형이라고 한다. (단, $A^2+B^2-4C>0$)

참고 $A^2+B^2-4C=0$이면 방정식 ①은 한 점 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$를 나타내고, $A^2+B^2-4C<0$이면 방정식 ①을 만족시키는 점은 존재하지 않는다.

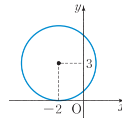
예제 02 방정식 $x^2+y^2+4x-6y+4=0$은 어떤 도형을 나타내는지 말하여라.

풀이 주어진 방정식을 변형하면

$$x^2+4x+4+y^2-6y+9=9$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=3^2$$

따라서 주어진 방정식은 중심이 점 $(-2,\ 3)$이고, 반지름의 길이가 3인 원을 나타낸다.



답 중심이 점 $(-2,\ 3)$이고, 반지름의 길이가 3인 원

2

목표| 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{0-2}{2},\ \frac{2+2}{2}\right)=(-1,\ 2)$$

이때 원의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(-1-0)^2+(2-2)^2}=1$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$\boldsymbol{(x+1)^2+(y-2)^2=1}$$

(2) 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{4+0}{2},\ \frac{0+6}{2}\right)=(2,\ 3)$$

이때 원의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(2-4)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-3)^2=13}$$

(3) 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-3+1}{2},\ \frac{1+5}{2}\right)=(-1,\ 3)$$

이때 원의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(-1+3)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$\boldsymbol{(x+1)^2+(y-3)^2=8}$$

(4) 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-5+3}{2},\ \frac{-2+4}{2}\right)=(-1,\ 1)$$

이때 원의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(-1+5)^2+(1+2)^2}=5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$\boldsymbol{(x+1)^2+(y-1)^2=25}$$

본문 해설

❶ 원의 방정식의 일반형

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \quad \cdots\cdots ①$$

이 x와 y의 2차방정식과 구분되는 점은 다음과 같다.

(ⅰ) x^2, y^2의 계수가 서로 같아야 한다.

x^2, y^2의 계수가 비록 1이 아니더라도 서로 같기만 하면, 식의 양변에 그 계수의 역수를 곱하여 ①로 변형할 수 있기 때문이다. 만약 x^2, y^2의 계수가 다르면 그 방정식의 그래프는 원이 아닌 곡선을 그리게 된다.

(ⅱ) xy항이 없어야 한다.

xy항이 존재하면 원의 방정식의 일반형으로부터 표준형으로 변형할 때 좌변에 x와 y에 대한 제곱항이 독립적으로 존재할 수 없게 되므로, 원의 방정식이 되지 못한다.

(ⅲ) 원의 방정식의 일반형을 표준형의 꼴로 정리했을 때 방정식의 우변, 즉 r^2에 해당하는 식이 바로 $\frac{A^2+B^2-4C}{4}$가 되며, 길이를 나타내는 r는 실수이고, 실수의 제곱은 음수가 될 수 없기 때문에 $A^2+B^2-4C>0$이어야 한다.

교과서 166 쪽

문제 3 다음 방정식은 어떤 도형을 나타내는지 말하여라.

(1) $x^2+y^2-2x-4y-4=0$

(2) $2x^2+2y^2+2x+6y+1=0$

발전 **문제 4** 다음 두 방정식이 모두 원을 나타낼 때, 실수 k값의 범위를 구하여라.

$$x^2+y^2-2x+k=0,\ x^2+y^2+4x-2y-k=0$$

예제 03 세 점 $(-2,\ -6)$, $(1,\ 3)$, $(5,\ 1)$을 지나는 원의 중심과 반지름의 길이를 구하여라.

세 점이 모두 일직선 위에 있지 않을 때, 그 세 점을 지나는 원은 단 하나로 정해진다.

풀이 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라고 하면 이 원은 세 점 $(-2,\ -6)$, $(1,\ 3)$, $(5,\ 1)$을 지나므로

$$\begin{cases} 40-2A-6B+C=0 \\ 10+A+3B+C=0 \\ 26+5A+B+C=0 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $A=-2$, $B=4$, $C=-20$이므로 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-2x+4y-20=0$$

이 방정식을 변형하면 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$

따라서 이 방정식은 중심이 점 $(1,\ -2)$이고, 반지름의 길이가 5인 원을 나타낸다.

답 중심: $(1,\ -2)$, 반지름의 길이: 5

문제 5 다음 세 점을 지나는 원의 중심과 반지름의 길이를 구하여라.

(1) $(0,\ 0)$, $(4,\ -3)$, $(2,\ 1)$

(2) $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 0)$

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

두 점 $A(-4,\ 0)$, $B(-1,\ 0)$에 대하여 $\overline{PA}=2\overline{PB}$를 만족시키는 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하여 보자.

3

목표| 원의 방정식의 일반형을 표준형으로 변형할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2+y^2-2x-4y-4=0$을 변형하면

$(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$

따라서 중심이 점 $(1,\ 2)$이고, 반지름의 길이가 3인 원이다.

(2) $2x^2+2y^2+2x+6y+1=0$을 변형하면

$x^2+y^2+x+3y+\frac{1}{2}=0$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=(\sqrt{2})^2$

따라서 중심이 점 $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이다.

4

목표| 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 원의 방정식이 되도록 하는 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2-2x+1+y^2=1-k$에서

$1-k>0,\ k<1$ ······①

$x^2+4x+4+y^2-2y+1=k+4+1$에서

$k+5>0,\ k>-5$ ······②

①, ②를 동시에 만족시키는 k값의 범위는 $\boldsymbol{-5<k<1}$

5

목표| 세 점을 지나는 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고, 세 점을 대입하여 풀면

$A=-4,\ B=3,\ C=0$

구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-4x+3y=0$

이 방정식을 변형하면 $(x-2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

따라서 중심은 점 $\left(2,\ -\frac{3}{2}\right)$이고, 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}$이다.

(2) 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고, 세 점을 대입하여 풀면

$A=-4,\ B=6,\ C=-12$

구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-4x+6y-12=0$

이 방정식을 변형하면 $(x-2)^2+(y+3)^2=25$

따라서 중심은 점 $(2,\ -3)$이고, 반지름의 길이는 5이다.

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 아폴로니우스의 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{PA}=2\overline{PB}$이므로 $\overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$(x+4)^2+y^2=4\{(x+1)^2+y^2\}$

이 식을 정리하면 구하는 도형의 방정식은 $\boldsymbol{x^2+y^2=4}$

교과서 167 쪽

02 원과 직선의 위치 관계

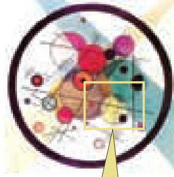
● 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.

좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계는 어떠한가?

생각 열기

원 속의 원

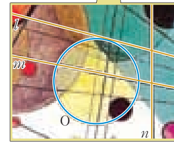
오른쪽 그림은 추상화의 창시자 칸딘스키(Kandinsky, W. ; 1866~1944)의 '원 속의 원'이라는 작품이다. 작품 속의 원은 각양각색의 이미지를 생성하는 상징으로, 이 그림을 보고 사람들은 세포의 세계를 떠올리기도 하고, 곡예사의 공 타기나 비눗방울 놀이를 생각하기도 한다.



탐구 활동

오른쪽 그림은 생각 열기의 그림의 일부를 확대한 것이다. 그림을 보고 원 O와 세 직선 l, m, n에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 원 O와 두 점에서 만나는 직선은 무엇인가?
2. 원 O와 한 점에서 만나는 직선은 무엇인가?
3. 원 O와 만나지 않는 직선은 무엇인가?

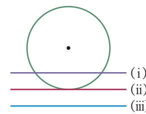


원과 직선의 위치 관계는 교점의 개수에 따라 다음 세 가지 경우가 있다.

(i) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ii) 한 점에서 만난다(접한다).

(iii) 만나지 않는다.



중② 원과 직선이 한 점에서 만날 때, 직선은 원에 접한다고 하며, 그 직선을 원의 접선, 그 교점을 접점이라고 한다.

이때 원과 직선이 만나는 경우는 서로 다른 두 점에서 만나는 경우와 한 점에서 만나는 경우의 두 가지이다.

이제 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계에 대하여 알아보자.

원과 직선의 방정식이 각각

$$x^2+y^2=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$y=mx+n \quad \cdots\cdots ②$$

일 때, 이들의 교점의 좌표는 ①, ②를 연립하여 풀었을 때의 해이다.

02 원과 직선의 위치 관계

소단원 지도 목표

① 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해하게 한다.

② 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

③ 원 위의 한 점을 지나는 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

④ 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 원과 직선의 교점의 x좌표는 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 만든 이차방정식의 실근임을 이해하게 한다.

2. 원과 직선의 교점의 개수를 구하는 방법에는 이차방정식의 판별식을 이용하는 방법과 원의 중심에서 직선까지의 거리와 반지름의 길이를 비교하여 구하는 방법의 두 가지가 있음을 이해하게 한다.

3. 기울기가 주어진 원의 접선은 2개가 있음을 이해하도록 지도한다.

4. 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선은 2개가 있음을 이해하도록 지도한다.

5. 원의 접점과 원의 중심을 연결한 선분은 서로 수직임을 지도한다.

생각 열기 참/고/자/료

현대 추상 미술의 창시자이며 추상화의 아버지라 불리는 칸딘스키는 러시아 출신의 프랑스 화가이다.

처음에 그는 법률과 경제학을 배웠으나 1895년 인상파전을 보고 모네의 작품에 감명을 받아 화가로 전향하였다. 그의 그림은 선명한 색채로써 교향악적이고도 역동적인 추상 표현에서 점차 기하학적 형태에 의한 구상적 양식으로 들어가서 독자적인 발자취를 남겼다.

주요 작품으로는 '푸른 산', '즉흥 14', '검은 선들' 등이 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 여러 개의 원과 직선들로 이루어진 칸딘스키의 작품에서 원과 직선의 위치 관계를 이해하는 토대가 되도록 한다.

1. 원 O와 두 점에서 만나는 직선은 m이다.

2. 원 O와 한 점에서 만나는 직선은 l이다.

3. 원 O와 만나지 않는 직선은 n이다.

본문 해설

❶ 두 직선의 교점의 좌표는 직선을 나타내는 두 일차방정식이 이루는 연립방정식의 실수해이다. 이와 같이 원과 직선의 교점의 좌표는 원의 방정식과 직선의 방정식이 이루는 연립방정식의 실수해이다.
그런데 원과 직선의 위치 관계는 교점의 개수에 따라 세 가지로 나누어지므로 원과 직선의 위치 관계만 알고자 하면 연립방정식의 실수해의 개수를 구하면 된다.
이때 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하면 한 문자에 대한 이차방정식이 되고, 이 방정식의 판별식을 이용하면 실수해의 개수를 구할 수 있다.
이때 이 방정식의 해인 x의 값을 직선의 방정식에 대입하여 얻은 y의 값에 대하여 순서쌍 $(x,\ y)$는 원과 직선의 교점의 좌표가 된다.

❷ $(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0$의 판별식 D는 다음과 같다.

$$D=(2mn)^2-4(m^2+1)(n^2-r^2)$$
$$=4m^2n^2-4(m^2n^2-m^2r^2+n^2-r^2)$$
$$=4\{(m^2+1)r^2-n^2\}$$

교과서 168 쪽

②를 ①에 대입하면

$$x^2+(mx+n)^2=r^2$$

이고, 이 식을 정리하면

$$(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0 \quad \cdots\cdots ③$$

이다.

모든 실수 m에 대하여 $m^2+1>0$이므로 $m^2+1\neq0$

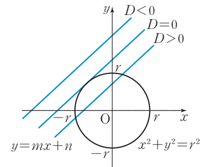
❶ 이 이차방정식의 해는 원과 직선의 교점의 x좌표이므로 이 이차방정식의 실근의 개수에 따라 원과 직선의 위치 관계가 결정된다.

❷ 따라서 ③의 판별식을 D라고 하면 D의 부호에 따라 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근, 중근, 허근을 가지므로 원 ①과 직선 ②의 위치 관계는 다음과 같다.

(ⅰ) $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
또 서로 다른 두 점에서 만나면 $D>0$이다.

(ⅱ) $D=0$이면 한 점에서 만난다(접한다).
또 한 점에서 만나면(접하면) $D=0$이다.

(ⅲ) $D<0$이면 만나지 않는다.
또 만나지 않으면 $D<0$이다.



예제 01 원 $x^2+y^2=10$과 직선 $y=x-2$의 위치 관계를 말하여라.

풀이 $y=x-2$를 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$$x^2+(x-2)^2=10$$

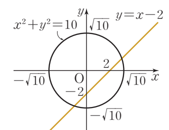
이 식을 정리하면

$$x^2-2x-3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\times(-3)=4>0$$

따라서 주어진 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.



답 서로 다른 두 점에서 만난다.

문제 1 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

(1) $x^2+y^2=3,\ y=x+5$ (2) $x^2+y^2=1,\ y=2x+2$
(3) $x^2+y^2=5,\ x-2y=5$ (4) $x^2+(y-2)^2=2,\ x+y=4$

1

목표| 원과 직선의 교점의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=x+5$를 $x^2+y^2=3$에 대입하면
$x^2+(x+5)^2=3,\ 2x^2+10x+22=0$
$\frac{D}{4}=5^2-2\times22=-19<0$
따라서 원과 직선의 교점의 개수는 **0**이다.

(2) $y=2x+2$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면
$x^2+(2x+2)^2=1,\ 5x^2+8x+3=0$
$\frac{D}{4}=4^2-5\times3=1>0$
따라서 원과 직선의 교점의 개수는 **2**이다.

(3) $x=2y+5$를 $x^2+y^2=5$에 대입하면
$(2y+5)^2+y^2=5,\ 5y^2+20y+20=0$
$\frac{D}{4}=10^2-5\times20=0$
따라서 원과 직선의 교점의 개수는 **1**이다.

(4) $y=-x+4$를 $x^2+(y-2)^2=2$에 대입하면
$x^2+(-x+4-2)^2=2,\ 2x^2-4x+2=0$
$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\times2=0$
따라서 원과 직선의 교점의 개수는 **1**이다.

2

목표| 원과 직선의 위치 관계를 이해하게 한다.

풀이| $y=x+k$를 $x^2+y^2=2$에 대입하면
$x^2+(x+k)^2=2,\ 2x^2+2kx+k^2-2=0$

교과서 169 쪽

예제 02 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k값의 범위를 구하여라.

풀이 $y=2x+k$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면 $x^2+(2x+k)^2=1$

$5x^2+4kx+k^2-1=0$ ……①

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 ①의 판별식 D가 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(2k)^2-5\times(k^2-1)>0$에서 $k^2<5$

따라서 $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$이다. **답** $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

● 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

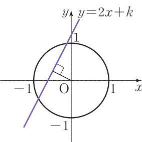
다른 풀이 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구하고, 이 거리와 원의 반지름의 길이를 비교함으로써 원과 직선의 위치 관계를 알 수 있다.

원의 반지름의 길이는 1이고, 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\times0-1\times0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{|k|}{\sqrt{5}}<1$이어야 한다.

즉, $|k|<\sqrt{5}$이므로 $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$이다.



문제 2 원 $x^2+y^2=2$와 직선 $y=x+k$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k의 값 또는 그 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다.
(3) 만나지 않는다.

발전 **문제 3** 좌표평면 위에 직선 $y=kx+2$와 두 원 C_1: $x^2+y^2=1$, C_2: $x^2+y^2=2$가 있다. 직선이 원 C_1과는 만나지 않고, 원 C_2와는 만날 때, 실수 k값의 범위를 구하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

원 $x^2+y^2=r^2\,(r>0)$과 직선 $y=mx+n$의 위치 관계를 원의 중심과 직선 사이의 거리와 반지름의 길이 사이의 관계를 이용하여 식으로 나타내어 보자.

---

(1) 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-2)>0$이어야 하므로

$k^2-4<0$에서 $(k+2)(k-2)<0$

$\boldsymbol{-2<k<2}$

(2) 원과 직선이 한 점에서 만나려면

$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-2)=0$이어야 하므로

$k^2-4=0$에서 $(k+2)(k-2)=0$

$\boldsymbol{k=-2}$ **또는** $\boldsymbol{k=2}$

(3) 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-2)<0$이어야 하므로

$k^2-4>0$에서 $(k+2)(k-2)>0$

$\boldsymbol{k<-2}$ **또는** $\boldsymbol{k>2}$

3

목표| 원과 직선의 위치 관계를 이해하게 한다.

풀이| $y=kx+2$를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+(kx+2)^2=1$, $(k^2+1)x^2+4kx+3=0$

직선이 원 C_1과는 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=(2k)^2-(k^2+1)\cdot3<0$

$k^2-3<0$

$-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$ ……①

$y=kx+2$를 $x^2+y^2=2$에 대입하면

$x^2+(kx+2)^2=2$, $(k^2+1)x^2+4kx+2=0$

직선이 원 C_2와는 만나므로

$\frac{D}{4}=(2k)^2-(k^2+1)\cdot2\ge0$

$2k^2-2\ge0$

$k\le-1$ 또는 $k\ge1$ ……②

따라서 ①, ②를 동시에 만족시키는 k값의 범위는

$\boldsymbol{-\sqrt{3}<k\le-1}$ **또는** $\boldsymbol{1\le k<\sqrt{3}}$

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 원의 중심과 직선 사이의 거리와 반지름의 길이를 이용하여 원과 직선의 위치 관계를 판별할 수 있게 한다.

풀이| 원 $x^2+y^2=r^2$의 중심과 직선 $y=mx+n$, 즉 $mx-y+n=0$ 사이의 거리를 d라고 하면

$$d=\frac{|m\times0-0+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}$$

이때 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(i) $\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}<r$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

또 서로 다른 두 점에서 만나면 $\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}<r$이다.

(ii) $\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=r$이면 한 점에서 만난다(접한다).

또 한 점에서 만나면(접하면) $\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=r$이다.

(iii) $\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}>r$이면 만나지 않는다.

또 만나지 않으면 $\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}>r$이다.

4

목표| 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 원 $x^2+y^2=9$에 접하고, 기울기가 $-\sqrt{3}$인 접선의 방정식은

$y=-\sqrt{3}x\pm3\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1}$

$\boldsymbol{y=-\sqrt{3}x\pm6}$

다른 풀이| 기울기가 $-\sqrt{3}$인 접선의 방정식을 $y=-\sqrt{3}x+b$, 즉 $\sqrt{3}x+y-b=0$으로 놓으면 이 직선과 원의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 3과 같으므로

$\dfrac{|\sqrt{3}\times0+1\times0-b|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=3,\ \dfrac{|b|}{2}=3$

$b=\pm6$

따라서 접선의 방정식은 $y=-\sqrt{3}x\pm6$

교과서 170 쪽

기울기가 주어진 원의 접선의 방정식을 어떻게 구하는가?

좌표평면 위에서 기울기가 주어지고 원에 접하는 접선의 방정식을 구하여 보자.

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고, 기울기가 m인 접선의 방정식을

$$y=mx+n \quad \cdots\cdots ①$$

으로 놓는다.

①을 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$에 대입하면

$$x^2+(mx+n)^2=r^2$$

이고, 이 식을 정리하면

$$(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0 \quad \cdots\cdots ②$$

이다. ②의 판별식을 D라고 하면

$$D=(2mn)^2-4(m^2+1)(n^2-r^2)$$
$$=4\{(m^2+1)r^2-n^2\}$$

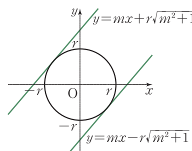
이고, 원과 직선이 접하면 $D=0$이므로

$$(m^2+1)r^2-n^2=0$$
$$n=\pm r\sqrt{m^2+1} \quad \cdots\cdots ③$$

이다. ③을 ①에 대입하면

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

을 얻는다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

> **원의 접선의 방정식 [1]**
> 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고, 기울기가 m인 접선의 방정식은
> $$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

보기 원 $x^2+y^2=4$에 접하고, 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y=3x\pm2\sqrt{3^2+1},\ y=3x\pm2\sqrt{10}$

문제 4 원 $x^2+y^2=9$에 접하고, 기울기가 $-\sqrt{3}$인 접선의 방정식을 구하여라.

문제 5 원 $x^2+y^2=4$에 접하고, 직선 $2x-y+1=0$에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

5

목표| 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 직선 $2x-y+1=0$, 즉 $y=2x+1$과 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 원 $x^2+y^2=4$에 접하고, 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이므로

$y=-\dfrac{1}{2}x\pm2\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+1},\ y=-\dfrac{1}{2}x\pm2\sqrt{\dfrac{5}{4}}$

$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2}x\pm\sqrt{5}}$

지/도/자/료 원의 극선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$ 밖의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$라고 하자.

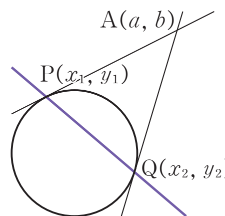
두 점에서의 접선의 방정식은 각각

$x_1x+y_1y=r^2,\ x_2x+y_2y=r^2$

이고, 두 접선이 모두 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$를 지나므로

$ax_1+by_1=r^2,\ ax_2+by_2=r^2$

이 성립한다.



이때 두 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$가 직선 $ax+by=r^2$ 위에 있으므로 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은 $ax+by=r^2$이 된다.

이때 두 점 P, Q를 지나는 직선을 점 A를 극(pole)으로 하는 극선(polar)이라고 한다.

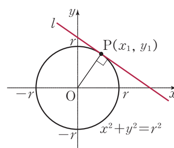
교과서 171 쪽

한 점을 지나는 원의 접선의 방정식을 어떻게 구하는가?

❶ 좌표평면 위에서 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

❷ (i) 점 P가 좌표축 위에 있지 않은 경우 $(x_1\neq0,\ y_1\neq0)$

직선 OP의 기울기는 $\dfrac{y_1}{x_1}$이고, 접선 l은 직선 OP에 수직이므로 접선 l의 기울기는 $-\dfrac{x_1}{y_1}$이다.



따라서 접선 l의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

이므로 이 식을 정리하면

$$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$$

이다. 그런데 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=r^2$$

이다. 그러므로 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

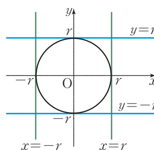
$$x_1x+y_1y=r^2$$

● 두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이 수직이면 $mm'=-1$

(ii) 점 P가 좌표축 위에 있는 경우 ($x_1=0$ 또는 $y_1=0$)

점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$의 좌표와 접선의 방정식은 다음 표와 같다.

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$	$(r,\ 0)$	$(-r,\ 0)$	$(0,\ r)$	$(0,\ -r)$
접선의 방정식	$x=r$	$x=-r$	$y=r$	$y=-r$



따라서 이 경우에도

$$x_1x+y_1y=r^2$$

이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **원의 접선의 방정식 [2]**
> 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은
> $$x_1x+y_1y=r^2$$

보기 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$2\times x+1\times y=5,\ 2x+y=5$$

본문 해설

❶ 접점의 좌표가 주어진 원의 접선의 방정식은 원의 접선과 원의 중심과 접점을 지나는 직선이 수직임을 이용하여 접선의 방정식을 세운 후, 접점이 원 위의 점임을 이용하여 공식을 유도한다. 일반적으로 접점이 주어지면 접선은 한 개 존재한다.

❷ 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같이 구할 수도 있다.

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고, 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$ ……①

기울기가 m이고, 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 접선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$

$y=mx+y_1-mx_1$ ……②

①, ②에서

$mx+y_1-mx_1=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

$y_1-mx_1=\pm r\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$(y_1-mx_1)^2=r^2(m^2+1)$

$x_1^2+y_1^2=r^2$이므로

$(y_1-mx_1)^2=(x_1^2+y_1^2)(m^2+1)$

$(my_1+x_1)^2=0,\ m=-\dfrac{x_1}{y_1}$

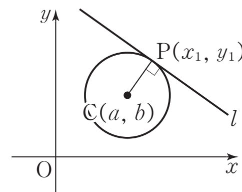
이것을 ②에 대입하여 정리하면

$x_1^2+y_1^2=r^2$이므로 $x_1x+y_1y=r^2$

지/도/자/료

원의 중심이 원점이 아닐 때, 원 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

1. 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$에 대하여 원의 중심을 $\mathrm{C}(a,\ b)$라고 하면



$x_1\neq a,\ y_1\neq b$일 때, 직선 PC의 기울기는 $\dfrac{y_1-b}{x_1-a}$이고, 접선 l은 직선 PC와 서로 수직이므로 l의 기울기는 $-\dfrac{x_1-a}{y_1-b}$이다.

따라서 직선 l의 방정식은

$y-y_1=-\dfrac{x_1-a}{y_1-b}(x-x_1)$

$(x_1-a)(x-x_1)+(y_1-b)(y-y_1)=0$ ……①

이 식은 $x_1=a$ 또는 $y_1=b$일 때에도 성립한다.

2. 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$과 접선 l을 평행이동하여 원의 중심이 원점에 오도록 하고, 평행이동된 접선을 l'이라고 하자.

접선 l'의 방정식은

$(x_1-a)x+(y_1-b)y=r^2$

접선 l은 l'을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로, 직선 l의 방정식은

$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$ ……②

①과 ②는 모양은 달라도 서로 같은 식이다.

6

목표| 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $1\times x+3\times y=10$, $\boldsymbol{y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}}$

(2) $0\times x+5\times y=25$, $\boldsymbol{y=5}$

본문 해설

❶ 예제 03을 다음과 같은 방법으로 풀 수도 있다.

접선의 방정식을 $y=m(x-3)+1$로 놓으면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y-3m+1=0$ 사이의 거리는 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$(-3m+1)^2=5(m^2+1)$

$2m^2-3m-2=0$

이 방정식을 풀면

$m=-\frac{1}{2}$ 또는 $m=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$x+2y=5$ 또는 $2x-y=5$

교과서 172 쪽

문제 6 다음 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $x^2+y^2=10,\ (1,\ 3)$ (2) $x^2+y^2=25,\ (0,\ 5)$

❶ 예제 03 점 $A(3,\ 1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

● 주어진 점이 원 위의 점인지 아닌지를 먼저 판단한다.

풀이 접점을 $P(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=5$ ……①

이 접선이 점 $A(3,\ 1)$을 지나므로

$3x_1+y_1=5$ ……②

한편 접점 $P(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=5$ 위에 있으므로

$x_1^2+y_1^2=5$ ……③

②, ③을 연립하여 풀면

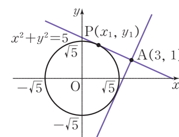
$\begin{cases}x_1=1\\y_1=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x_1=2\\y_1=-1\end{cases}$

● 원의 외부에 있는 한 점에서 원에 그은 접선은 두 개이다.

이것을 ①에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$x+2y=5$ 또는 $2x-y=5$

답 $x+2y=5$ 또는 $2x-y=5$

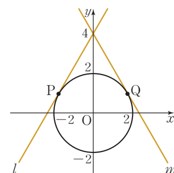


문제 7 점 $(1,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

산업용 로봇이 오른쪽 그림과 같은 두 직선 l, m에 동시에 접하는 원을 그리는 작업을 하고 있다. 이때 직선 l, m의 방정식과 접점 P, Q의 좌표를 구하여라.



7

목표| 원 밖의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 접점을 $P(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=1$ …… ①

이 접선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$x_1+2y_1=1$ …… ②

한편 접점 $P(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있으므로

${x_1}^2+{y_1}^2=1$ …… ③

②, ③을 연립하여 풀면

$\begin{cases}x_1=-\frac{3}{5}\\y_1=\frac{4}{5}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x_1=1\\y_1=0\end{cases}$

이것을 ①에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$\boldsymbol{3x-4y+5=0}$ **또는** $\boldsymbol{x=1}$

단원 과제

목표| 원 밖의 점에서 그은 접선의 방정식과 접점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 원의 방정식은 $x^2+y^2=4$이므로 접점을 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=4$

이 접선이 점 $(0,\ 4)$를 지나므로 $4y_1=4$, $y_1=1$

한편 접점 $(x_1,\ y_1)$, 즉 $(x_1,\ 1)$은 원 $x^2+y^2=4$ 위에 있으므로 ${x_1}^2+1=4$이므로 ${x_1}^2=3$, $x_1=\pm\sqrt{3}$

따라서 직선 l의 방정식은 $\boldsymbol{-\sqrt{3}x+y=4}$, 직선 m의 방정식은 $\boldsymbol{\sqrt{3}x+y=4}$이고, 접점 P의 좌표는 $\boldsymbol{P(-\sqrt{3},\ 1)}$, 접점 Q의 좌표는 $\boldsymbol{Q(\sqrt{3},\ 1)}$이다.

교과서 173 쪽

[해답 p.230]

중단원 기초

수준별 학습

1 다음 원의 방정식을 구하여라. — 01 원의 방정식

(1) 중심이 $(1,\ 2)$이고, 반지름의 길이가 3인 원

(2) 두 점 $(-2,\ 1)$, $(6,\ 7)$을 지름의 양 끝으로 하는 원

2 다음 방정식이 나타내는 원의 중심과 반지름의 길이를 구하여라. — 01 원의 방정식

(1) $x^2+y^2+4x+3=0$ (2) $x^2+y^2-6x+2y+6=0$

3 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라. — 02 원과 직선의 위치 관계

(1) $x^2+y^2=3,\ y=3x-5$

(2) $x^2+y^2=1,\ x+2y+3=0$

4 원 $x^2+y^2=4$에 접하고, 기울기가 -2인 접선의 방정식을 구하여라. — 02 원과 직선의 위치 관계 / 원의 접선의 방정식

5 다음 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여라. — 02 원과 직선의 위치 관계 / 원의 접선의 방정식

(1) $x^2+y^2=25,\ (4,\ -3)$

(2) $x^2+y^2=12,\ (-3,\ \sqrt{3})$

중/단/원 기초

1

목표| 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$, $\boldsymbol{(x-1)^2+(y-2)^2=9}$

(2) 구하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+6}{2},\ \dfrac{1+7}{2}\right)=(2,\ 4)$

이때 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{\{2-(-2)\}^2+(4-1)^2}=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-4)^2=25}$

2

목표| 원의 방정식의 일반형을 표준형으로 변형할 수 있게 한다.

풀이| (1) 주어진 식을 변형하면

$(x+2)^2+y^2=1$

따라서 중심은 **점 $(-2,\ 0)$**, 반지름의 길이는 **1**이다.

(2) 주어진 식을 변형하면

$(x-3)^2+(y+1)^2=4$

따라서 중심은 **점 $(3,\ -1)$**, 반지름의 길이는 **2**이다.

3

목표| 원과 직선의 교점의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=3x-5$를 $x^2+y^2=3$에 대입하면

$x^2+(3x-5)^2=3,\ 5x^2-15x+11=0$

$D=(-15)^2-4\cdot5\cdot11=5>0$

따라서 교점의 개수는 **2**이다.

(2) $x+2y+3=0$에서 $y=-\dfrac{x+3}{2}$

이것을 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+\left(-\dfrac{x+3}{2}\right)^2=1$

$4x^2+x^2+6x+9=4,\ 5x^2+6x+5=0$

$\dfrac{D}{4}=3^2-5\cdot5=-16<0$

따라서 교점의 개수는 **0**이다.

4

목표| 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=-2x\pm2\sqrt{(-2)^2+1}$, $\boldsymbol{y=-2x\pm2\sqrt{5}}$

5

목표| 원 위의 한 점을 지나는 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\boldsymbol{4x-3y=25}$ (2) $\boldsymbol{-3x+\sqrt{3}y=12}$

중/단/원 기본

교과서 174 쪽

중단원 기본

[해답 p.230]

수준별 학습

1 원 $x^2+y^2+4x-10y+28=0$의 중심과 점 $(4, -1)$을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하여라. — 01 원의 방정식

2 방정식 $x^2+y^2-4kx-2ky+10k=0$이 원을 나타낼 때, 실수 k값의 범위를 구하여라. — 01 원의 방정식 / 원이 되는 조건

3 원 $x^2+y^2=3$과 직선 $y=mx+2$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m값의 범위를 구하여라. — 02 원과 직선의 위치 관계

4 직선 $y=2x-1$과 평행하고, 원 $x^2+y^2=9$에 접하는 직선의 방정식을 구하여라. — 02 원과 직선의 위치 관계 / 원의 접선의 방정식

5 원점 O에서 원 $x^2+y^2-8x-4y+18=0$에 그은 두 접선의 기울기를 구하여라. — 02 원과 직선의 위치 관계 / 원의 접선의 방정식

1

목표| 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2+y^2+4x-10y+28=0$에서

$(x+2)^2+(y-5)^2=1$이므로 중심의 좌표는 $(-2, 5)$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+4}{2}, \dfrac{5+(-1)}{2}\right)=(1, 2)$

이때 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{\{1-(-2)\}^2+(2-5)^2}=3\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$\mathbf{(x-1)^2+(y-2)^2=18}$

2

목표| 이차방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 원의 방정식이 되도록 하는 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2+y^2-4kx-2ky+10k=0$에서

$(x-2k)^2+(y-k)^2=5k^2-10k$

$5k^2-10k>0$이므로 $\mathbf{k<0}$ **또는** $\mathbf{k>2}$

3

목표| 원과 직선의 위치 관계를 이해하게 한다.

풀이| $y=mx+2$를 $x^2+y^2=3$에 대입하면

$x^2+(mx+2)^2=3$, $(m^2+1)x^2+4mx+1=0$

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$\dfrac{D}{4}=(2m)^2-(m^2+1)\times1=3m^2-1>0$

따라서 $\mathbf{m<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$ **또는** $\mathbf{m>\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$이다.

4

목표| 주어진 직선과 평행한 원의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=2x-1$과 평행한 직선의 기울기는 2이다. 따라서 기울기가 2이고 원 $x^2+y^2=9$에 접하는 직선의 방정식은 $y=2x\pm3\sqrt{2^2+1}$, $\mathbf{y=2x\pm3\sqrt{5}}$

5

목표| 원 밖의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 원점을 지나는 직선을 $y=kx$라 하고, 이것을 주어진 원의 방정식에 대입하여 정리하면

$(k^2+1)x^2-4(k+2)x+18=0$

원과 직선이 접하려면

$\dfrac{D}{4}=4(k+2)^2-18(k^2+1)=0$

$7k^2-8k+1=0$, $(7k-1)(k-1)=0$

$k=\dfrac{1}{7}$ 또는 $k=1$

따라서 두 접선의 기울기는 $\mathbf{\dfrac{1}{7}}$, $\mathbf{1}$이다.

중단원 실력

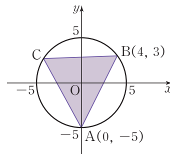
[해답 p.231]

수준별 학습

1 두 점 A$(-3,\ 1)$, B$(3,\ 4)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:1$인 점 P가 그리는 도형은 원이다. 이 원의 중심과 반지름의 길이를 구하여라. — 01 원의 방정식

2 원점 O와 원 $x^2+y^2-6x-6y+16=0$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라고 할 때, mM의 값을 구하여라. — 01 원의 방정식

3 원 $x^2+y^2=25$ 위의 두 점 A$(0,\ -5)$, B$(4,\ 3)$과 원 위를 움직이는 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을 구하여라. — 02 원과 직선의 위치 관계 / 원의 접선의 방정식



4 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=10$ 위의 점 A$(2,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 구하여라. — 02 원과 직선의 위치 관계 / 원의 접선의 방정식

5 점 $(5,\ 5)$에서 원 $x^2+y^2=10$에 그은 두 접선과 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하여라. — 02 원과 직선의 위치 관계 / 원의 접선의 방정식

중/단/원 실력

1

목표| 아폴로니우스의 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 P의 좌표를 P$(x,\ y)$라고 하면 $2\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}$이므로 $(x-5)^2+(y-5)^2=20$에서 중심은 **점 (5, 5)**이고, 반지름의 길이는 $\mathbf{2\sqrt{5}}$이다.

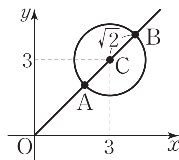
2

목표| 원의 방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 식을 변형하면

$(x-3)^2+(y-3)^2=2$

따라서 점 P는 중심이 C$(3,\ 3)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원 위에 있다.



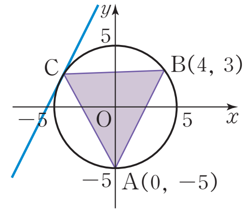
$m=\overline{\mathrm{OC}}-\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{2}$, $M=\overline{\mathrm{OC}}+\overline{\mathrm{CB}}=4\sqrt{2}$

$mM=\mathbf{16}$

3

목표| 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

풀이| 삼각형 ABC의 넓이는 점 C에서의 접선이 직선 AB에 평행할 때 최대가 된다. 직선 AB의 기울기는 2이므로 기울기가 2이고 점 C를 지나는 접선의 방정식을 구하면 $y=2x+5\sqrt{5}$



점 A$(0,\ -5)$와 직선 $y=2x+5\sqrt{5}$ 사이의 거리는 $\dfrac{|0+5+5\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=5+\sqrt{5}$이므로 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{(4-0)^2+\{3-(-5)\}^2}\times(5+\sqrt{5})$

$=\mathbf{10\sqrt{5}+10}$

4

목표| 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 원의 중심을 점 C라고 하면 직선 AC의 기울기는 $\dfrac{0-(-3)}{2-1}=3$이고, 점 A에서의 접선은 직선 AC와 수직이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}}$

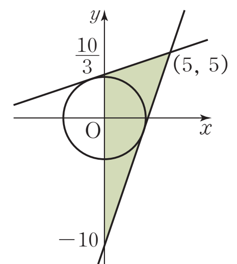
5

목표| 원 밖의 점에서 그은 접선을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 $(5,\ 5)$에서 원 $x^2+y^2=10$에 그은 접선의 방정식을 구하면

$3x-y=10$ 또는 $-x+3y=10$

따라서 이 두 접선의 y절편은 각각 -10, $\dfrac{10}{3}$이므로 구하는 삼각형의 넓이는



$\dfrac{1}{2}\times\left\{\dfrac{10}{3}-(-10)\right\}\times5=\mathbf{\dfrac{100}{3}}$

4 도형의 이동

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 평행이동의 의미를 이해하게 한다.

② 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 평행이동	평행이동한 점의 좌표
	평행이동한 도형의 방정식
02 대칭이동	대칭이동한 점의 좌표
	대칭이동한 도형의 방정식
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 176 쪽

4 도형의 이동

당구에도 수학이?

당구는 벨벳을 깐 당구대 위에서 상아나 플라스틱으로 만든 몇 개의 공을 긴 막대기 끝으로 쳐서 승부를 가리는 실내 스포츠이다. 당구대 안쪽의 공이 부딪치는 가장자리 면을 쿠션이라고 하는데, 당구공을 치면 당구대의 쿠션에 부딪쳐 공이 반사되며 진행한다. 이때 부딪친 각도를 이용하여 당구공의 진행 경로를 예측할 수 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 186 쪽

수학을 이용하여 당구공의 진행 경로를 예측할 수 있을까?

들어가면서 당구공이 쿠션을 맞고 진행하는 경로를 생각할 때, 대칭의 개념을 이용하여 설명할 수 있다. 이때 당구대 위에서 공의 회전이나 마찰은 무시하고, 빛이 반사되어 진행하는 경로와 같은 원리로 입사각과 반사각의 크기가 같은 원리를 적용한다.

이 단원에서는 좌표평면에서 점과 도형의 평행이동, 점과 도형의 대칭이동을 이해하고 이를 활용하여 실생활에서 접할 수 있는 문제를 해결할 수 있게 한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 평행이동의 의미를 이해하고, 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다.	상	평행이동을 이용하여 평행이동한 도형의 방정식과 원래의 방정식의 관계를 이해하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	주어진 도형의 방정식으로부터 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다.
	하	평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.
2. 원점, x축, y축에 대한 대칭이동의 의미를 이해하고, 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다.	상	원점, x축, y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	원점, x축, y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다.
	하	원점, x축, y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.
3. 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해하고, 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다.	상	직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다.
	하	직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.

교과서 177 쪽

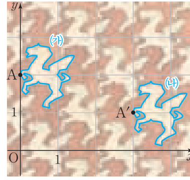
01 평행이동

● 평행이동의 의미를 이해한다.

평행이동한 점의 좌표를 어떻게 구하는가?

탐구 활동

네덜란드의 예술가 에스허르(Escher, M. C. ; 1898~1972)는 반복되는 기하학적 패턴을 이용한 작품을 많이 만들었다. 오른쪽 그림은 페가수스를 반복적으로 배열한 에스허르의 작품을 좌표평면 위에 올려놓은 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 점 A′은 점 A를 어떻게 평행이동한 것인가?

2. 페가수스 (나)는 페가수스 (가)를 어떻게 평행이동한 것인가?

중② 어떤 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 옮기는 것을 평행이동이라고 한다.

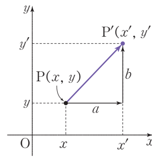
❶ 좌표평면 위의 임의의 점 $P(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $P'(x',\ y')$이라고 하면

$$x'=x+a,\quad y'=y+b$$

가 성립한다. 따라서 점 P'의 좌표는

$$P'(x+a,\ y+b)$$

이다.



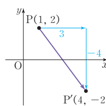
이상을 정리하면 다음과 같다.

점의 평행이동

점 $P(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점 P'의 좌표는

$$P'(x+a,\ y+b)$$

보기 점 $P(1,\ 2)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점 P'의 좌표는 $(1+3,\ 2-4)$, 즉 $(4,\ -2)$이다.



01 평행이동

소단원 지도 목표

① 점의 평행이동을 이해하고, 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

② 도형의 방정식을 $f(x,\ y)=0$의 꼴로 나타내는 것을 이해하게 한다.

③ 도형의 평행이동을 이해하고, 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 좌표축의 평행이동은 다루지 않는다.

2. 직선의 방정식은 $y=f(x)$의 꼴과 $f(x,\ y)=0$의 꼴로 표현이 가능하지만 원의 방정식은 $f(x,\ y)=0$의 꼴로만 표현할 수 있음에 유의하여 지도한다.

3. 평행이동에 의하여 도형의 방정식은 변하지만 도형의 모양과 크기는 변하지 않음을 이해하게 한다.

4. 점의 평행이동과 도형의 평행이동을 혼동하지 않도록 유의하여 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

• $f(x,\ y)=0$

생각 열기 참/고/자/료

테셀레이션(tessellation)은 4를 뜻하는 그리스어 '테세레스(tesseres)'에서 유래한 용어로, 정사각형을 붙여 만드는 과정에서 생겨났다. 테셀레이션을 이용한 가장 대표적인 건축물로는 에스파냐 그라나다에 있는 이슬람식 알람브라궁전이 꼽힌다.

테셀레이션 미술가로는 네덜란드의 판화가 에스허르(Escher, M. C. ; 1898~1972)가 유명하다. 그는 알람브라궁전의 타일 모자이크에 감명을 받은 뒤, 정다면체를 소재로 한 테셀레이션 작품을 비롯해, 수학적 개념이 내포된 다양한 판화 작품을 만들어 테셀레이션이 미술 장르로 정착하는 데 이바지하였다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 에스허르의 작품 페가수스를 이용하여 좌표평면에서 점과 도형의 평행이동을 발견하는 토대가 되도록 한다.

1. 점 A′은 점 A를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

2. 페가수스 (나)는 페가수스 (가)를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

본문 해설

❶ 점 $P(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하여 점 $P'(x+a,\ y+b)$에 위치하게 하는 평행이동을

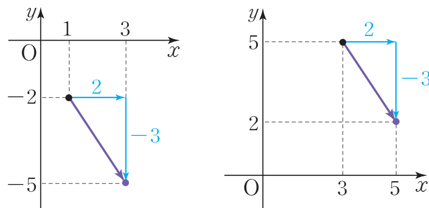
$P(x,\ y) \longrightarrow P'(x+a,\ y+b)$

와 같이 나타내기도 한다.

1

목표| 좌표평면에서 점의 평행이동을 이해하고, 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(3,\ -5)$ (2) $(5,\ 2)$



2

목표| 좌표평면에서 평행이동하기 전의 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(0,\ 0)$이므로

$x-4=0,\ y+5=0$

$x=4,\ y=-5$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathbf{P(4,\ -5)}$이다.

(2) 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-1,\ -2)$이므로

$x-4=-1,\ y+5=-2$

$x=3,\ y=-7$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathbf{P(3,\ -7)}$이다.

다른 풀이| (1) 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(0,\ 0)$이므로 점 $(0,\ 0)$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동하면 점 P가 된다.

따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(0+4,\ 0-5)$, 즉 $\mathrm{P}(4,\ -5)$

본문 해설

❶ 방정식 $f(x,\ y)=0$은 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$으로 나타내거나 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 나타내는 것과 같이 두 변수 x, y에 관한 식으로 이루어져 있으며 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이다.

교과서 178 쪽

문제 1 다음 점을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표를 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $(1,\ -2)$ (2) $(3,\ 5)$

문제 2 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표가 다음과 같을 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

(1) $(0,\ 0)$ (2) $(-1,\ -2)$

평행이동한 도형의 방정식을 어떻게 구하는가?

❶ 직선의 방정식 $y=3x+2$와 원의 방정식 $x^2+y^2=1$은 각각

$$3x-y+2=0,\ x^2+y^2-1=0$$

으로 나타낼 수 있다. 이와 같이 좌표평면 위의 도형의 방정식은 일반적으로

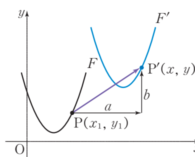
$$f(x,\ y)=0$$

과 같이 나타낼 수 있다.

이제 좌표평면에서 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 F를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형 F'의 방정식을 구하여 보자.

❷ 도형 F 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 $\mathrm{P}'(x,\ y)$라고 하면 $x=x_1+a,\ y=y_1+b$이므로

$$x_1=x-a,\ y_1=y-b \qquad \cdots\cdots ①$$



이다. 그런데 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 도형 F 위의 점이므로

$$f(x_1,\ y_1)=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. 이때 ①을 ②에 대입하면

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

이 성립한다.

따라서 평행이동한 점 $\mathrm{P}'(x,\ y)$는 방정식 $f(x-a,\ y-b)=0$을 만족시킨다.

❷ 예를 들어 직선 $l:\ 3x-y+2=0$이 평행이동

$(x,\ y) \longrightarrow (x+2,\ y-3)$

에 의하여 옮겨지는 직선을 l'이라고 하자.

직선 l 위의 임의의 한 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 l' 위의 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$으로 옮겨진다면

$x'=x+2,\ y'=y-3 \qquad \cdots\cdots ①$

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 직선 l 위에 있으므로

$3x-y+2=0 \qquad \cdots\cdots ②$

①, ②에서 x, y를 소거하면

$3(x'-2)-(y'+3)+2=0$

따라서 직선 l'의 방정식은

$3(x-2)-(y+3)+2=0$

주의| 점의 평행이동과 도형의 평행이동을 혼동하지 않도록 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$f(x-a,\ y-b)=0$은 $f(x,\ y)=0$에서 x 대신 $x-a$, y 대신 $y-b$를 대입한 것과 같다.

❶ 도형의 평행이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

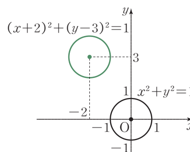
예제 01 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

풀이 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$\{x-(-2)\}^2+(y-3)^2=1$$

따라서 구하는 도형의 방정식은

$$(x+2)^2+(y-3)^2=1$$



문제 3 다음 도형을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하여라.

(1) $2x+3y+6=0$　　(2) $y=x^2+4x$

문제 4 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하였더니 직선 $y=4x+5$와 일치하였다. 이때 상수 a, b의 값을 구하여라.

발전 **문제 5** 원 $x^2+y^2+4x-8y+11=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 중심이 원점이 되었다. 이때 상수 a, b의 값을 구하여라.

본문 해설

❶ 방정식 $f(x-a,\ y-b)=0$은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$의 x좌표(x')와 y좌표(y')가 방정식 $f(x-a,\ y-b)=0$을 만족시킴을 뜻한다.
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식을 $f(x+a,\ y+b)=0$으로 잘못 생각하지 않도록 주의한다.

3

목표| 좌표평면에서 도형의 평행이동을 이해하고, 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 방정식에 x 대신 $x-5$, y 대신 $y+1$을 대입하여 정리한다.

(1) $2(x-5)+3(y+1)+6=0$

$\mathbf{2x+3y-1=0}$

(2) $y+1=(x-5)^2+4(x-5)$

$\mathbf{y=x^2-6x+4}$

4

목표| 좌표평면 위에서 평행이동하기 전의 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-3=a(x+2)+b$

$y=ax+2a+b+3$

이것이 직선 $y=4x+5$와 일치하므로

$a=4,\ 2a+b+3=5$

$\mathbf{a=4,\ b=-6}$

다른 풀이| 직선 $y=4x+5$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+3=4(x-2)+5,\ y=4x-6$

이것이 직선 $y=ax+b$와 일치하므로

$a=4,\ b=-6$

5

목표| 중심이 원점이 되도록 원을 평행이동할 수 있게 한다.

풀이| 원 $x^2+y^2+4x-8y+11=0$을 표준형으로 고치면

$(x+2)^2+(y-4)^2=9$

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a+2)^2+(y-b-4)^2=9$

이 원의 중심이 원점이므로

$-a+2=0,\ \ -b-4=0$

$\mathbf{a=2,\ b=-4}$

참고| 원을 평행이동하면 중심은 평행이동되지만 반지름의 길이는 변하지 않는다.

교과서 180 쪽

예제 02 직선 $y=2x$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동할 때, 원 $x^2+y^2=5$에 접하도록 하는 상수 a의 값을 모두 구하여라.

풀이 직선 $y=2x$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면

$$y=2(x-a) \qquad \cdots\cdots ①$$

이것을 $x^2+y^2=5$에 대입하면

$$x^2+4(x-a)^2=5$$
$$5x^2-8ax+4a^2-5=0$$

직선 ①이 원에 접하므로

$$\frac{D}{4}=(-4a)^2-5(4a^2-5)=0$$
$$4a^2-25=0,\ a=\pm\frac{5}{2}$$

답 $\pm\frac{5}{2}$

직선이 원에 접하면 직선과 원의 교점이 1개이므로 판별식 $D=0$이다.

다른 풀이 직선 $y=2x$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면

$$y=2(x-a),\ 2x-y-2a=0$$

이 직선이 원 $x^2+y^2=5$와 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x-y-2a=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같아야 한다. 즉,

$$\frac{|-2a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5},\ |2a|=5$$

따라서 $a=\pm\frac{5}{2}$이다.

문제 6 원 $x^2+y^2=1$을 y축의 방향으로 b만큼 평행이동할 때, 직선 $y=-x$에 접하도록 하는 상수 b의 값을 모두 구하여라.

사고력 기르기

추론
▶의사소통
문제 해결

직선이나 원을 평행이동하여도 변하지 않는 성질에는 어떤 것이 있는지 토의하여 보자.

6

목표| 원을 직선에 접하도록 평행이동할 수 있게 한다.

풀이| 원 $x^2+y^2=1$을 y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $x^2+(y-b)^2=1$

$y=-x$를 위의 식에 대입하면

$x^2+(-x-b)^2=1,\ 2x^2+2bx+b^2-1=0$

원 $x^2+(y-b)^2=1$과 직선 $y=-x$가 접하므로

$\frac{D}{4}=b^2-2(b^2-1)=0,\ -b^2+2=0$

따라서 구하는 상수 b의 값은 $\pm\sqrt{2}$이다.

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 직선이나 원을 평행이동하였을 때 변하지 않는 성질에 대하여 토의할 수 있게 한다.

풀이| 직선 $y=mx+n$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$y-b=m(x-a)+n,\ y=mx-ma+n+b$

따라서 직선을 평행이동하여도 기울기는 변하지 않는다.

원 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$(x-a-p)^2+(y-b-q)^2=r^2$

따라서 원을 평행이동하여도 반지름의 길이는 변하지 않는다.

지/도/자/료

1. 도형 $y=f(x)$와 도형 $f(x,\ y)=0$을 평행이동한 도형의 방정식은 다음과 같다.

(1) x축의 방향으로 a만큼 평행이동할 때

$y=f(x) \longrightarrow y=f(x-a)$

$f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(x-a,\ y)=0$

(2) y축의 방향으로 b만큼 평행이동할 때

$y=f(x) \longrightarrow y-b=f(x)$

$f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(x,\ y-b)=0$

(3) x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동할 때

$y=f(x) \longrightarrow y-b=f(x-a)$

$f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(x-a,\ y-b)=0$

2. 직선 l을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선 l'에 대하여 l과 l'이 일치하는 경우가 있다. 이때 직선 l의 기울기를 구하여 보자.

직선 l의 방정식을 $y=px+q$라고 하면 직선 l을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은

$y-b=p(x-a)+q$

$y=px+q-pa+b \qquad \cdots\cdots ①$

①이 $y=px+q$와 일치하므로

$-pa+b=0,\ p=\frac{b}{a}$

따라서 직선 l의 기울기는 $\frac{b}{a}$이다.

교과서 181 쪽

02 대칭이동

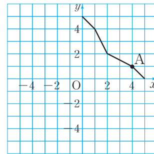
● 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다.

대칭이동한 점의 좌표를 어떻게 구하는가?

생각 열기 **데칼코마니**

데칼코마니는 화면을 밀착시킴으로써 물감의 흐름으로 생기는 우연한 얼룩이나 어긋남의 효과를 이용한 기법을 말한다. 종이 위에 그림물감을 두껍게 칠하고 반으로 접거나 다른 종이를 덮어 찍어서 대칭적인 무늬를 만드는 것으로 주로 인쇄기에 넣을 수 없는 물체에 장식을 하거나 상표를 붙일 때 이 기법을 이용한다. 데칼코마니라는 용어는 20세기 중엽의 독특한 미술 기법을 일컫는 말이었는데, 초현실주의 화가 에른스트(Ernst, M. ; 1891~1976)는 그림에 이 기법을 사용하였다.

탐구 활동 **다음 그림을 보고, 물음에 답하여 보자.**



1. 주어진 도형과 x축, y축, 원점에 대하여 대칭인 도형을 각각 그려 보자.
2. 점 A와 x축, y축, 원점에 대하여 대칭인 점을 각각 표시하고, 좌표를 구하여 보자.
3. 점 A의 좌표와 2에서 구한 대칭인 점의 좌표를 비교하여 보자.

좌표평면 위의 점 P를 한 직선 또는 한 점에 대하여 대칭인 점으로 이동하는 것을 각각 직선 또는 점에 대한 **대칭이동**이라고 한다.

02 대칭이동

소단원 지도 목표

① 점의 대칭이동을 이해하고, 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

② 도형의 대칭이동을 이해하고, 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 좌표평면 위에서의 위치 변화를 살펴보게 하여 구하게 한다.

2. 직선 $y=x$에 대한 대칭이동에서 좌표가 변환되는 과정은 다소 복잡하므로 구체적인 예를 통해 이해를 돕는다.

새로 나온 용어와 기호

• 대칭이동 (對稱移動, reflection)

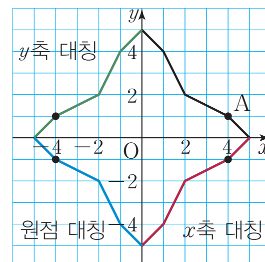
생각 열기 참/고/자/료

데칼코마니 분야의 대표적인 독일 화가인 막스 에른스트는 1924년 이후에 초현실주의에 적극 참여하였으며 1925년에 프로타주(Frottage)를 고안하여 새로운 환상회화의 영역을 개척했다. 주요 작품으로는 '새', '신부의 의상', '조가비의 꽃' 등이 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 이 탐구 활동은 데칼코마니를 이용하여 대칭의 개념을 이해하고, 좌표평면에서 주어진 도형을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동하는 공식을 발견하는 토대가 되도록 하기 위한 것이다.

1. 2. 주어진 도형과 점 A를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭인 도형과 점을 나타내면 다음과 같다.
점 A$(4,\ 1)$과 x축, y축, 원점에 대하여 대칭인 점의 좌표는 각각 $\mathbf{(4,\ -1)}$, $\mathbf{(-4,\ 1)}$, $\mathbf{(-4,\ -1)}$이다.



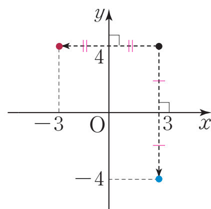
3. 점 A$(4,\ 1)$과 x축에 대하여 대칭인 점은 y좌표의 부호가 바뀌고, y축에 대하여 대칭인 점은 x좌표의 부호가 바뀌고, 원점에 대하여 대칭인 점은 x좌표와 y좌표의 부호가 모두 바뀐다.

1

목표| 좌표평면에서 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

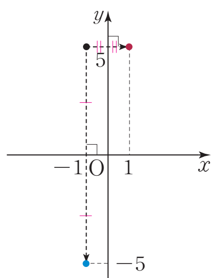
풀이| (1) x축에 대하여 대칭이동: $\mathbf{(3,\ -4)}$

y축에 대하여 대칭이동: $\mathbf{(-3,\ 4)}$



(2) x축에 대하여 대칭이동: $\mathbf{(-1,\ -5)}$

y축에 대하여 대칭이동: $\mathbf{(1,\ 5)}$



본문 해설

❶ 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라고 하면 선분 PP'의 중점 $\left(\dfrac{x+x'}{2},\ \dfrac{y+y'}{2}\right)$은 원점이므로

$\dfrac{x+x'}{2}=0,\ \dfrac{y+y'}{2}=0$

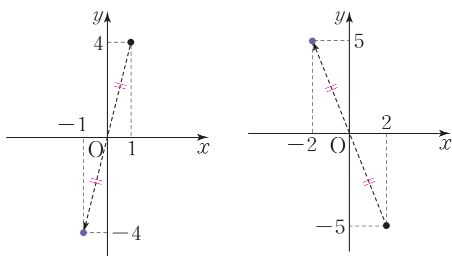
$x'=-x,\ y'=-y$

따라서 점 P'의 좌표는 $\mathrm{P}'(-x,\ -y)$

2

목표| 좌표평면에서 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\mathbf{(-1,\ -4)}$ (2) $\mathbf{(-2,\ 5)}$

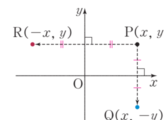


교과서 182 쪽

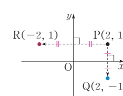
좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 점의 좌표를 구하여 보자.

점 P를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 P'이라고 하면 직선 l은 선분 PP'의 수직이등분선이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각 $\mathrm{Q}(x,\ -y)$, $\mathrm{R}(-x,\ y)$가 된다.



보기 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $\mathrm{Q}(2,\ -1)$이고, y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $\mathrm{R}(-2,\ 1)$이다.



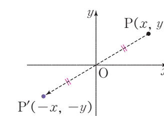
문제 1 다음 점을 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 각각 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $(3,\ 4)$ (2) $(-1,\ 5)$

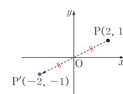
한편 점 P를 한 점 A에 대하여 대칭이동한 점을 P'이라고 하면 점 A는 선분 PP'의 중점이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $\mathrm{P}'(-x,\ -y)$가 된다.

❶ 선분 PP'의 중점이 원점이므로 점 P'의 좌표는 $(-x,\ -y)$



보기 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $\mathrm{P}'(-2,\ -1)$이다.

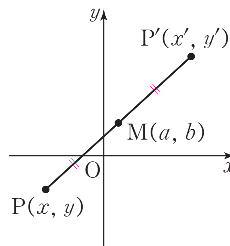


문제 2 다음 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $(1,\ 4)$ (2) $(2,\ -5)$

지/도/자/료 임의의 점에 대한 대칭이동

점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 점 $\mathrm{M}(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라고 하자.



이때 점 M은 선분 PP'의 중점이므로

$\dfrac{x+x'}{2}=a,\ \dfrac{y+y'}{2}=b$

$x'=2a-x,\ y'=2b-y$

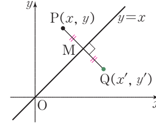
따라서 점 P'의 좌표는

$\mathrm{P}'(2a-x,\ 2b-y)$

교과서 183 쪽

좌표평면에서 점 $P(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 $Q(x',\ y')$의 좌표를 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$는 선분 PQ의 수직이등분선이다. 즉, 직선 PQ와 직선 $y=x$는 수직이므로



> 기울기가 각각 m, m'인 두 직선이 수직이면 $mm'=-1$

$$\frac{y'-y}{x'-x}\times 1=-1$$

$$x'+y'=x+y \quad \cdots\cdots ①$$

이다. 또한 선분 PQ의 중점은

$$M\left(\frac{x+x'}{2},\ \frac{y+y'}{2}\right)$$

이고, 이 점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$\frac{y+y'}{2}=\frac{x+x'}{2}$$

$$x'-y'=-x+y \quad \cdots\cdots ②$$

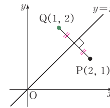
이다. ①, ②를 연립하여 풀면

$$x'=y,\ y'=x$$

이다.

따라서 점 $P(x,\ y)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $Q(y,\ x)$이다.

보기 점 $P(2,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $Q(1,\ 2)$이다.



문제 3 다음 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $(2,\ 7)$　　(2) $(-3,\ 4)$　　(3) $(-5,\ -1)$

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ 점의 대칭이동

점 $(x,\ y)$를 대칭이동한 점의 좌표는

(1) x축에 대한 대칭이동: $(x,\ -y)$

(2) y축에 대한 대칭이동: $(-x,\ y)$

(3) 원점에 대한 대칭이동: $(-x,\ -y)$

(4) 직선 $y=x$에 대한 대칭이동: $(y,\ x)$

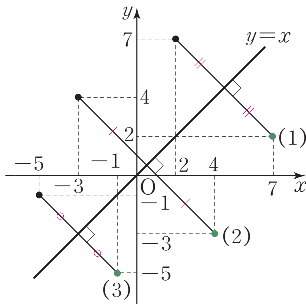
3

목표| 좌표평면에서 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(7,\ 2)$

(2) $(4,\ -3)$

(3) $(-1,\ -5)$



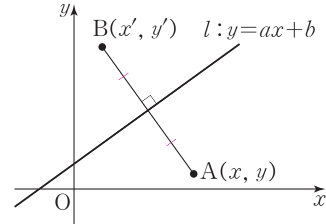
본문 해설

❶ x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 y 대신 $-y$를 대입하고, y축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 x 대신 $-x$를 대입하고, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 x 대신 $-x$, y 대신 $-y$를 대입하며, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 x와 y를 서로 바꾼다.

지/도/자/료

1. 직선에 대한 대칭이동

점 $A(x,\ y)$를 직선 $l:\ y=ax+b$에 대하여 대칭이동한 점을 B라고 할 때, 점 B의 좌표는 다음을 이용하여 구한다.



(i) 직선 l이 선분 AB를 이등분한다. 즉, 선분 AB의 중점이 직선 l 위에 있으므로 다음이 성립한다.

$$\frac{y+y'}{2}=a\cdot\frac{x+x'}{2}+b$$

(ii) 직선 l은 선분 AB에 수직이다. 즉, 직선 l과 직선 AB의 기울기의 곱이 -1이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{y'-y}{x'-x}\times a=-1$$

2. 직선 $y=-x$에 대한 대칭이동

직선 $y=-x$에 대한 대칭이동은 원점에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것으로 생각할 수 있다. 또는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 원점에 대하여 대칭이동한 것으로 생각할 수 있다.

즉, 점 $P(a,\ b)$를 원점에 대하여 대칭이동하면

$(-a,\ -b)$

이 점을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$(-b,\ -a)$

이것은 점 $(a,\ b)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 결과와 같다.

본문 해설

❶ 두 점 A, B와 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구할 때

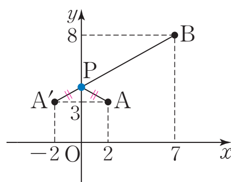
(i) A, B가 x축에 대하여 반대 방향에 있는 경우
$\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\overline{AB}$이다.

(ii) A, B가 x축에 대하여 같은 방향에 있는 경우
점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라고 하면 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은 $\overline{A'B}$이다.

4

목표| 점의 대칭이동을 이용하여 두 선분의 길이의 합이 최소가 되는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 A$(2,\ 3)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라고 하면 A′의 좌표는 A′$(-2,\ 3)$이다.



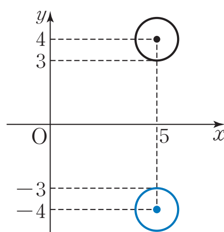
이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로 $\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$
즉, 점 P가 선분 A′B와 y축의 교점일 때, $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값은 최소이고, 그때의 최솟값은
$\overline{A'B}=\sqrt{(7+2)^2+(8-3)^2}=\sqrt{106}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 이 탐구 활동은 원의 중심을 x축에 대하여 대칭이동하여 점의 대칭이동과 도형의 대칭이동을 연관지어 이해하도록 하기 위한 것이다.

1. 원의 중심이 $(5,\ 4)$이므로 x축에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(5,\ -4)$

2. $(x-5)^2+(y+4)^2=1$

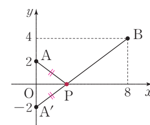


교과서 184 쪽

❶ 예제 **01** 좌표평면 위의 두 점 A$(0,\ 2)$, B$(8,\ 4)$에 대하여 다음 물음에 답하여라.
(1) 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점 A′의 좌표를 구하여라.
(2) x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구하여라.

풀이 (1) 점 A$(0,\ 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은
A′$(0,\ -2)$
(2) $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로
$\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{A'P}+\overline{PB}\geq\overline{A'B}$
즉, 점 P가 선분 A′B와 x축의 교점일 때 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 값은 최소이고, 그때의 최솟값은
$\overline{A'B}=\sqrt{(8-0)^2+\{4-(-2)\}^2}=10$

● △AOP≡△A′OP에서 $\overline{AP}=\overline{A'P}$



답 (1) A′$(0,\ -2)$ (2) 10

문제 **4** 좌표평면 위에 두 점 A$(2,\ 3)$, B$(7,\ 8)$이 있다. y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값을 구하여라.

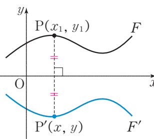
대칭이동한 도형의 방정식을 어떻게 구하는가?

탐구 활동 **원 $(x-5)^2+(y-4)^2=1$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.**
1. 원의 중심을 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하고, 좌표평면 위에 나타내어 보자.
2. **1**에서 구한 점이 중심이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식을 구하여 보자.

좌표평면에서 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 F를 x축에 대하여 대칭이동한 도형 F'의 방정식을 구하여 보자.

도형 F 위의 임의의 점 P$(x_1,\ y_1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P′$(x,\ y)$라고 하면 $x=x_1$, $y=-y_1$이므로
$x_1=x,\ y_1=-y$ …… ①
이다. 그런데 점 P$(x_1,\ y_1)$은 도형 F 위의 점이므로
$f(x_1,\ y_1)=0$ …… ②
이다.

● 점 P′은 도형 F' 위의 점이다.



읽/기/자/료 대칭성의 아름다움

인간과 자연 현상 속에서 조화로운 대칭 구조를 많이 찾아볼 수 있다.
특히 회화와 조각, 건축 등에서 대칭성의 아름다움을 표현하는 작품들이 많이 있다.

인도의 타지마할

교과서 185 쪽

이때 ①을 ②에 대입하면

$$f(x,\ -y)=0$$

이 성립한다.

따라서 x축에 대하여 대칭이동한 점 $\mathrm{P}'(x,\ y)$는 방정식 $f(x,\ -y)=0$을 만족시킨다.

마찬가지 방법으로 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 각각

$$f(-x,\ y)=0,\ f(-x,\ -y)=0,\ f(y,\ x)=0$$

임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

도형의 대칭이동

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 대칭이동한 도형의 방정식은

(1) x축에 대한 대칭이동: $f(x,\ -y)=0$

(2) y축에 대한 대칭이동: $f(-x,\ y)=0$

(3) 원점에 대한 대칭이동: $f(-x,\ -y)=0$

(4) 직선 $y=x$에 대한 대칭이동: $f(y,\ x)=0$

예제 02 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 각각 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

(i) x축에 대한 대칭이동
⇨ y의 부호를 반대로
(ii) y축에 대한 대칭이동
⇨ x의 부호를 반대로
(iii) 원점에 대한 대칭이동
⇨ x, y의 부호 모두 반대로

풀이 (i) x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$(x-3)^2+(-y-2)^2=1$

$(x-3)^2+(y+2)^2=1$

(ii) y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

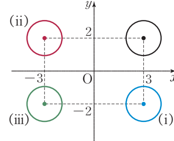
$(-x-3)^2+(y-2)^2=1$

$(x+3)^2+(y-2)^2=1$

(iii) 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$(-x-3)^2+(-y-2)^2=1$

$(x+3)^2+(y+2)^2=1$



문제 5 다음 도형을 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 각각 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $y=2x-1$ (2) $y=x^2-4x+6$ (3) $(x-1)^2+(y+3)^2=9$

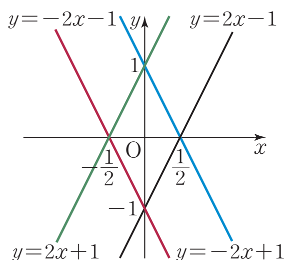
5

목표| 좌표평면에서 도형의 대칭이동을 이해하고 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) x축에 대하여 대칭이동: $\boldsymbol{y=-2x+1}$

y축에 대하여 대칭이동: $\boldsymbol{y=-2x-1}$

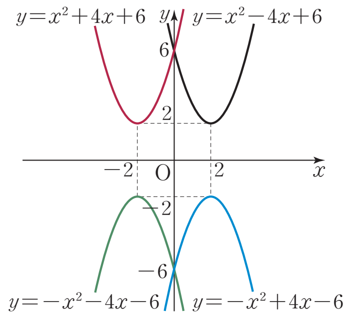
원점에 대하여 대칭이동: $\boldsymbol{y=2x+1}$



(2) x축에 대하여 대칭이동: $\boldsymbol{y=-x^2+4x-6}$

y축에 대하여 대칭이동: $\boldsymbol{y=x^2+4x+6}$

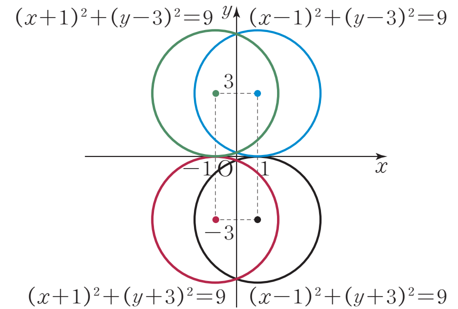
원점에 대하여 대칭이동: $\boldsymbol{y=-x^2-4x-6}$



(3) x축에 대하여 대칭이동: $\boldsymbol{(x-1)^2+(y-3)^2=9}$

y축에 대하여 대칭이동: $\boldsymbol{(x+1)^2+(y+3)^2=9}$

원점에 대하여 대칭이동: $\boldsymbol{(x+1)^2+(y-3)^2=9}$



지/도/자/료 좌표축과 평행한 직선에 대한 대칭이동

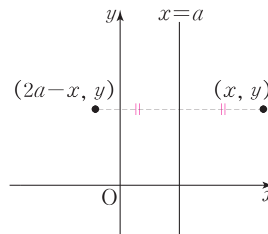
1. (1) 직선 $x=a$에 대한 점의 대칭이동

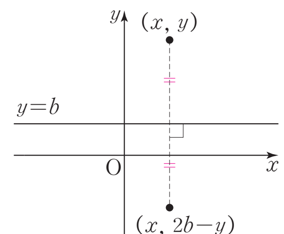
$$(x,\ y) \longrightarrow (2a-x,\ y)$$

(2) 직선 $y=b$에 대한 점의 대칭이동

$$(x,\ y) \longrightarrow (x,\ 2b-y)$$

2. 도형 $f(x,\ y)=0$을 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(2a-x,\ y)=0$이고, 직선 $y=b$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x,\ 2b-y)=0$이다.

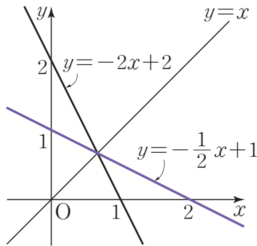




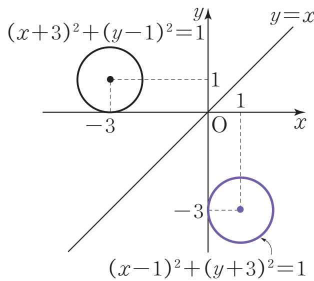
6

목표| 좌표평면에서 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=-\frac{1}{2}x+1$



(2) $(x-1)^2+(y+3)^2=1$



교과서 186 쪽

예제 03 다음 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

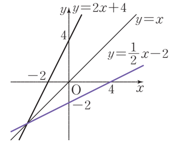
(1) $y=2x+4$ (2) $(x+1)^2+y^2=4$

직선 $y=x$에 대한 대칭이동 ⇨ x 대신 y, y 대신 x를 대입

풀이 (1) $y=2x+4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$x=2y+4$

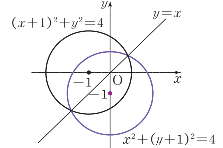
$y=\frac{1}{2}x-2$



(2) $(x+1)^2+y^2=4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$(y+1)^2+x^2=4$

$x^2+(y+1)^2=4$



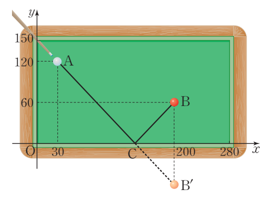
문제 6 다음 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하고, 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $y=-2x+2$ (2) $(x+3)^2+(y-1)^2=1$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 당구대를 좌표평면 위에 나타내었을 때, 빨간 당구공을 나타내는 점 B를 x축에 대하여 대칭시킨 점을 B′이라고 하자. 당구공 A를 쳐서 쿠션을 한 번 맞힌 후 당구공 B를 맞히기 위하여 $\overline{AB'}$과 x축이 만나는 점 C를 조준하였다. 이때 점 C의 좌표를 구하여라. (단, 당구공의 크기는 무시한다.)



단원 과제

목표| 점의 대칭이동을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 B′$(200,\ -60)$이므로 직선 AB′의 방정식은

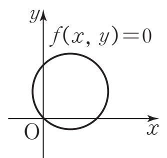
$$y-120=\frac{-60-120}{200-30}(x-30),\ y-120=-\frac{18}{17}(x-30)$$

따라서 점 C의 좌표는 $\mathbf{C\left(\frac{430}{3},\ 0\right)}$이다.

참고| 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점 A′$(30,\ -120)$에 대하여 직선 A′B의 x절편의 좌표를 구하여도 결과가 동일하다.

지/도/자/료 절댓값 기호가 있는 도형의 방정식

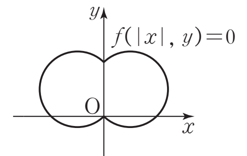
오른쪽 그림과 같은 원의 방정식을 $f(x,\ y)=0$이라고 할 때, 방정식에 절댓값 기호가 있는 여러 가지 도형에 대하여 알아보자.



(1) $f(|x|,\ y)=0$

$\begin{cases} x\ge0\text{일 때, } f(x,\ y)=0 \\ x<0\text{일 때, } f(-x,\ y)=0 \end{cases}$

이때 $f(-x,\ y)=0$이 나타내는 도형은 원 $f(x,\ y)=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 도형이므로 $f(|x|,\ y)=0$이 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x,\ |y|)=0$

$\begin{cases} y\ge0\text{일 때, } f(x,\ y)=0 \\ y<0\text{일 때, } f(x,\ -y)=0 \end{cases}$

이때 $f(x,\ -y)=0$이 나타내는 도형은 원 $f(x,\ y)=0$을 x축

중단원 기초

[해답 p.233]

수준별 학습

1 다음 점을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점의 좌표를 구하여라.

(1) $(-1,\ 3)$ (2) $(0,\ 0)$

01 평행이동 점의 평행이동

2 다음 도형을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구하여라.

(1) $y=-x+2$
(2) $y=3x^2$
(3) $(x+3)^2+(y-1)^2=1$

01 평행이동 도형의 평행이동

3 점 $(1,\ -2)$를 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하여라.

(1) x축 (2) y축
(3) 원점 (4) 직선 $y=x$

02 대칭이동 점의 대칭이동

4 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=2$를 다음에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여라.

(1) x축 (2) y축
(3) 원점 (4) 직선 $y=x$

02 대칭이동 도형의 대칭이동

중/단/원 기초

1

목표| 좌표평면에서 점의 평행이동을 이해하고, 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

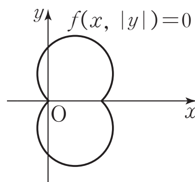
풀이| (1) $(-1+1,\ 3-2)$, 즉 $\mathbf{(0,\ 1)}$
(2) $(0+1,\ 0-2)$, 즉 $\mathbf{(1,\ -2)}$

2

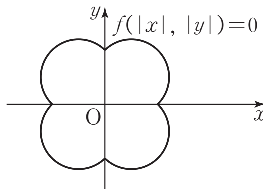
목표| 좌표평면에서 도형의 평행이동을 이해하고, 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y-2=-(x+3)+2$, 즉
$\mathbf{y=-x+1}$
(2) $y-2=3(x+3)^2$, 즉
$\mathbf{y=3(x+3)^2+2}$
(3) $(x+3+3)^2+(y-2-1)^2=1$, 즉
$\mathbf{(y+6)^2+(y-3)^2=1}$

에 대하여 대칭이동한 도형이므로 $f(x,\ |y|)=0$이 나타내는 도형은 다음 그림과 같다.



(3) 같은 방법으로 $f(|x|,\ |y|)=0$이 나타내는 도형은 다음 그림과 같다.



3

목표| 좌표평면에서 점의 대칭이동을 이해하고, 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\mathbf{(1,\ 2)}$ (2) $\mathbf{(-1,\ -2)}$
(3) $\mathbf{(-1,\ 2)}$ (4) $\mathbf{(-2,\ 1)}$

4

목표| 좌표평면에서 도형의 대칭이동을 이해하고, 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(x+1)^2+(-y-3)^2=2$, 즉
$\mathbf{(x+1)^2+(y+3)^2=2}$
(2) $(-x+1)^2+(y-3)^2=2$, 즉 $\mathbf{(x-1)^2+(y-3)^2=2}$
(3) $(-x+1)^2+(-y-3)^2=2$, 즉
$\mathbf{(x-1)^2+(y+3)^2=2}$
(4) $(y+1)^2+(x-3)^2=2$, 즉 $\mathbf{(x-3)^2+(y+1)^2=2}$

중/단/원 기본

1

목표| 좌표평면에서 도형의 평행이동을 이해하고, 평행이동한 도형의 방정식을 이용하여 미지수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y+2k=2(x-k)+3$, 즉
$y=2x-4k+3$이 $y=2x-5$와 일치하므로
$-4k+3=-5$, $\boldsymbol{k=2}$

2

목표| 좌표평면에서 점과 도형의 평행이동을 구분하여 평행이동한 점의 좌표와 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(3+a,\ -2+b)=(1,\ 1)$에서
$\boldsymbol{a=-2,\ b=3}$
(2) 주어진 방정식에 x 대신 $x+2$, y 대신 $y-3$을 대입하면 $\boldsymbol{2x+5y-8=0}$

교과서 188 쪽

중단원 기본

[해답 p.233]

수준별 학습

1 직선 $y=2x+3$을 x축의 방향으로 k, y축의 방향으로 $-2k$만큼 평행이동하였더니 직선 $y=2x-5$와 일치하였다. 이때 상수 k의 값을 구하여라.

01 평행이동
도형의 평행이동

2 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(3,\ -2)$가 점 $(1,\ 1)$로 옮겨질 때, 다음 물음에 답하여라.
(1) 상수 a, b의 값을 구하여라.
(2) 이 평행이동에 의하여 직선 $2x+5y+3=0$이 옮겨진 도형의 방정식을 구하여라.

01 평행이동
점과 도형의 평행이동

3 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 C라고 할 때, 선분 BC의 길이를 구하여라.

02 대칭이동
점의 대칭이동

4 직선 $y=2x+a$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 직선 $y=bx+2$와 일치한다. 이때 상수 a, b의 값을 구하여라.

02 대칭이동
도형의 대칭이동

5 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=1$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후 다시 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하여라.

01 평행이동
02 대칭이동
도형의 평행이동과 대칭이동

3

목표| 좌표평면에서 점의 대칭이동을 이해하고, 대칭이동한 두 점 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{B}(3,\ -1)$
점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{C}(1,\ 3)$
따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$이다.

4

목표| 좌표평면에서 도형의 대칭이동을 이해하고, 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 직선 $y=2x+a$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 $y=\frac{1}{2}x-\frac{a}{2}$이 직선 $y=bx+2$와 일치하므로
$\boldsymbol{a=-4,\ b=\frac{1}{2}}$

5

목표| 좌표평면에서 도형의 평행이동과 대칭이동을 이해하고, 평행이동과 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=1$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면
$(x-3)^2+(y-1)^2=1$
이 원을 다시 원점에 대하여 대칭이동하면
$\boldsymbol{(x+3)^2+(y+1)^2=1}$

중/단/원 실력

1

목표| 도형의 평행이동을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $x^2+y^2+2x+4y+c=0$에서
$(x+1)^2+(y+2)^2=-c+5$

중단원 실력

[해답 p.233]

수준별 학습

1 원 $x^2+y^2+2x+4y+c=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원 $x^2+y^2=2$와 일치하였다. 이때 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

01 평행이동 도형의 평행이동

2 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 x축과 직선 $y=x$에 동시에 접하였다. 이때 양수 a, b의 값을 구하여라.

01 평행이동 도형의 평행이동

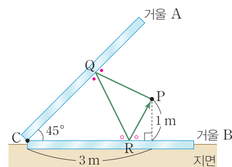
3 점 (2, 1)을 지나는 직선을 x축에 대하여 대칭이동하였더니 점 (0, 2)를 지나게 되었다. 이때 처음 직선의 방정식을 구하여라.

02 대칭이동 도형의 대칭이동

4 곡선 $y=x^2-1$ 위의 서로 다른 두 점 A, B가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

02 대칭이동 점의 대칭이동

5 오른쪽 그림과 같이 두 거울 A, B가 45°의 각을 이루며 C에서 만나고 있다. 점 C에서 오른쪽으로 3 m, 위쪽으로 1 m 떨어진 지점 P에서 거울 A의 방향으로 빛을 발사하였더니 거울 A에서 반사된 후 거울 B에서 다시 반사되어 원래 지점 P로 되돌아왔다고 한다. 이때 빛의 경로 P−Q−R−P의 길이를 구하여라.



(단, 거울의 두께는 무시한다.)

02 대칭이동 점의 대칭이동

이 원을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$(x-a+1)^2+(y-b+2)^2=-c+5$

이 원이 원 $x^2+y^2=2$와 일치하므로

$\boldsymbol{a=1,\ b=2,\ c=3}$

2

목표| 도형의 평행이동을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$(x-a)^2+(y-b)^2=1$ …… ①

①이 x축에 접하고, b는 양수이므로 $b=1$

①이 직선 $y=x$에 접하므로

$\dfrac{|a-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1,\ |a-1|=\sqrt{2}$

a는 양수이므로 $a=\sqrt{2}+1$

따라서 $\boldsymbol{a=\sqrt{2}+1,\ b=1}$이다.

3

목표| 도형의 대칭이동을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 (2, 1)을 지나는 직선의 기울기를 m이라고 하면 직선의 방정식은

$y-1=m(x-2)$에서 $y=mx-2m+1$

이 직선을 x축에 대하여 대칭이동하면

$-y=mx-2m+1$에서 $y=-mx+2m-1$

이 직선이 점 (0, 2)를 지나므로 $m=\dfrac{3}{2}$

따라서 처음 직선의 방정식은 $\boldsymbol{y=\dfrac{3}{2}x-2}$

4

목표| 점의 대칭이동을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 서로 다른 두 점 A, B의 좌표를 $(a,\ b)$, $(b,\ a)$라고 하면 곡선 $y=x^2-1$ 위의 점이므로

$b=a^2-1,\ a=b^2-1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=0$ 또는 $a=-1$

$a=0$일 때 $b=-1$, $a=-1$일 때 $b=0$

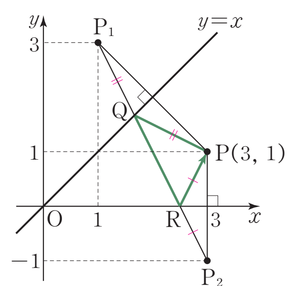
따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(0,\ -1)$, $(-1,\ 0)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{\{0-(-1)\}^2+(-1-0)^2}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

5

목표| 도형의 대칭이동을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 C를 원점, 거울 B를 x축으로 놓으면 점 P의 좌표는 (3, 1)이고, 거울 A의 방정식은 $y=x$이다.



점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 P_1, x축에 대하여 대칭이동한 점을 P_2라고 하면 $P_1(1,\ 3)$, $P_2(3,\ -1)$이고 $\overline{PQ}=\overline{P_1Q}$, $\overline{PR}=\overline{P_2R}$이므로

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{P_1Q}+\overline{QR}+\overline{RP_2}=\overline{P_1P_2}=2\sqrt{5}$

따라서 빛의 경로 P−Q−R−P의 길이는 $\boldsymbol{2\sqrt{5}}$ **m**이다.

5 부등식의 영역

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 부등식의 영역의 의미를 이해하게 한다.

② 부등식의 영역을 활용하여 최대, 최소 문제를 해결할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 부등식의 영역	부등식의 영역
	원의 내부와 외부
	연립부등식의 영역
02 부등식의 영역에서의 최대, 최소	부등식의 영역에서 최댓값과 최솟값
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

들어가면서 학교나 교실의 안과 밖은 담장을 경계로 구분 짓는다. 국가 간에도 영토, 영해, 영공이라는 경계가 있어 자국과 타국 소유를 구분한다. 동물도 자신만의 영역이 있으며, 식물도 종류에 따라 분포하는 지역이 다르다. 우리나라에는 24절기가 있어서 계절의 변화를 확인하며, 12월 31일을 기준으로 한 해가 바뀐다. 이와 같이 경계가 정해지면 주어진 것을 분류할 수 있게 된다.
이 단원에서는 영역을 부등식으로 나타내고, 이를 활용하여 최대, 최소 문제를 해결하는 방법에 대하여 지도한다.

교과서 190 쪽

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 부등식 $y>f(x)$의 영역을 나타낼 수 있다.	상	부등식 $y>f(x)$의 영역을 좌표평면 위에 나타내고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	부등식 $y>f(x)$의 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있다.
	하	좌표평면 위의 한 점이 부등식 $y>f(x)$를 만족시키는지 확인할 수 있다.
2. 부등식 $f(x, y)>0$의 영역을 나타낼 수 있다.	상	부등식 $f(x, y)>0$의 영역을 좌표평면 위에 나타내고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	부등식 $f(x, y)>0$의 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있다.
	하	좌표평면 위의 한 점이 부등식 $f(x, y)>0$을 만족시키는지 확인할 수 있다.
3. 연립부등식의 영역을 나타낼 수 있다.	상	연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있다.
	하	좌표평면 위의 한 점이 연립부등식을 만족시키는지 확인할 수 있다.
4. 부등식의 영역을 활용하여 최대, 최소 문제를 해결할 수 있다.	상	연립부등식을 만족시키는 영역 위에서 구하는 식의 최대, 최소 문제를 해결할 수 있다.
	중	부등식을 만족시키는 영역 위에서 구하는 식의 최대, 최소 문제를 해결할 수 있다.
	하	주어진 조건을 만족시키는 연립부등식의 영역을 좌표평면에 나타낼 수 있다.

교과서 191 쪽

01 부등식의 영역

● 부등식의 영역의 의미를 이해한다.

부등식의 영역을 어떻게 나타내는가?

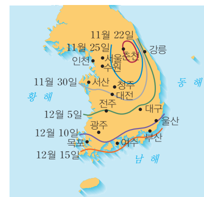
생각 열기 **김장**

김장은 하루 최저 기온이 0 ℃ 이하, 하루 평균 기온이 4 ℃ 이하로 떨어지는 시기에 하는 것이 좋다고 한다. 지구 온난화에 따른 기온 상승으로 김장을 하기 좋은 시기가 늦춰지는 경향을 보이고 있는데, 서울의 경우 1920년대에 비해 2000년대의 김장하기 좋은 시기는 약 12일 정도 늦춰졌다.

탐구 활동

오른쪽 그림은 어느 해의 주요 도시의 김장하기 좋은 시기를 예상하여 시기가 같은 지점을 선으로 연결한 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 11월에 김장하기 좋은 도시를 모두 찾아보자.
2. 12월에 김장하기 좋은 도시를 모두 찾아보자.



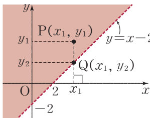
김장하기 좋은 시기

● 좌표평면에서 방정식 $y=x-2$를 만족시키는 점 (x, y) 전체가 그리는 도형은 직선이다.
● 좌표평면은 직선에 의하여 두 부분으로 나누어진다.

좌표평면에서 부등식 $y>x-2$를 만족시키는 점을 나타내어 보자.

부등식 $y>x-2$를 만족시키는 임의의 점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이라고 하면 $y_1>x_1-2$이다.

점 P를 지나고 y축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x-2$와 만나는 점을 $\mathrm{Q}(x_1, y_2)$라고 하면 $y_2=x_1-2$이다.



따라서 $y_1>y_2$이므로 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$은 직선 $y=x-2$의 위쪽에 놓여 있다.

거꾸로 직선 $y=x-2$의 위쪽에 있는 한 점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이라고 하면 $y_1>x_1-2$이므로 부등식 $y>x-2$를 만족시킨다.

01 부등식의 영역

소단원 지도 목표

① 부등식의 영역의 뜻을 이해하게 한다.
② 다항함수의 그래프를 경계로 하는 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있게 한다.
③ 원의 내부, 외부를 좌표평면 위에 나타내고, 이를 부등식으로 표현할 수 있게 한다.
④ 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 부등식 $y>f(x)$ 또는 $y<f(x)$의 영역은 부등식을 만족시키는 점 전체임을 이해하게 하고, $y=f(x)$의 그래프에 의하여 각각의 영역이 나눠짐을 알게 한다.

2. 부등식의 영역을 나타낼 때에는 경계선 $y=f(x)$의 포함 여부를 꼭 나타내어야 한다. 이때 부등식의 영역에 포함되는 경계는 실선으로, 포함되지 않는 경계는 점선으로 나타내도록 지도한다.

3. 부등식 $f(x, y)>0$ 또는 $f(x, y)<0$의 영역을 나타낼 때에는 경계선 위에 있지 않은 점을 택하여 그 점의 좌표가 부등식을 만족시키는지에 따라 그 영역을 결정하도록 한다.

4. 연립부등식의 영역은 각 부등식의 영역의 공통부분임을 이해하게 한다.

5. 연립부등식 $\begin{cases} y<f(x) \\ y>g(x) \end{cases}$와 $\{y-f(x)\}\{y-g(x)\}>0$의 영역의 차이점을 알고, 각각을 그릴 수 있도록 지도한다.

생각 열기 참/고/자/료

김치가 지역에 따라 특성이 있는 가장 큰 이유는 기온의 차이에서 비롯한 것이다.
북쪽 지방에서는 기온이 낮으므로 김장의 간을 싱겁게 하고, 양념도 담백하게 하여 채소의 신선미를 그대로 살린다.
반면에 남쪽에서는 대개 짜게 담근다. 소금만을 쳐서 짜게 하면 맛이 없으므로 젓국을 많이 쓰고 간혹 고기 국물을 섞기도 한다. 또한 마늘, 생강, 고춧가루 등도 많이 넣어서 젓국의 냄새를 가시게 하고 젓국 때문에 김치가 지나치게 삭는 것도 막는다.
따라서 북쪽의 김치는 국물이 많고 담백하며 신선하고, 남쪽의 김치는 고추를 많이 쓰며 국물이 거의 없고 진하다. 중부 지방의 김치는 연분홍의 투명한 색을 배추와 국물에 물들게 하는 특징이 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 우리나라에서 11월과 12월이 김장하기 좋은 시기인 도시를 각각 찾아보게 함으로써 부등식의 영역의 의미를 이해하는 토대가 되도록 한다.

1. 춘천, 인천, 서울, 수원, 서산, 청주, 대전

2. 강릉, 전주, 광주, 대구, 울산, 목포, 여수, 부산

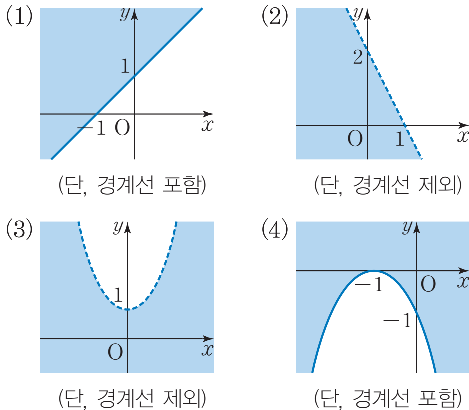
본문 해설

❶ 부등식 $y>f(x)$를 만족시키는 점 $(x,\ y)$ 전체를 부등식 $y>f(x)$의 영역이라고 한다. 곡선 $y=f(x)$는 좌표평면을 두 부분으로 나누는데 그중에서 곡선 $y=f(x)$의 윗부분은 부등식 $y>f(x)$의 영역, 아랫부분은 부등식 $y<f(x)$의 영역이다.

1

목표| 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있게 한다.

풀이| $y=f(x)$의 그래프를 먼저 그린 후, $y>f(x)$의 영역은 그래프의 윗부분, $y<f(x)$의 영역은 그래프의 아랫부분임을 이용하여 부등식의 영역을 나타내면 다음과 같다.

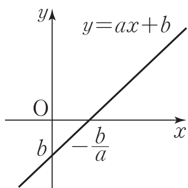


(1) (단, 경계선 포함) (2) (단, 경계선 제외)

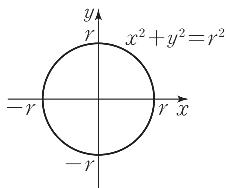
(3) (단, 경계선 제외) (4) (단, 경계선 포함)

지/도/자/료 여러 가지 그래프의 개형

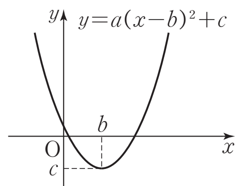
1. 직선 $y=ax+b$



2. 원 $x^2+y^2=r^2$



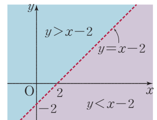
3. 포물선 $y=a(x-b)^2+c\ (a>0)$



교과서 192 쪽

따라서 부등식 $y>x-2$를 만족시키는 점 전체는 직선 $y=x-2$의 윗부분이다.

마찬가지 방법으로 부등식 $y<x-2$를 만족시키는 점 전체는 직선 $y=x-2$의 아랫부분임을 알 수 있다.

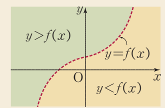


이와 같이 좌표평면에서 x, y에 대한 부등식을 만족시키는 점 $(x,\ y)$ 전체를 그 부등식의 영역이라고 한다.

일반적으로 부등식의 영역에 대하여 다음이 성립한다.

❶ 부등식의 영역

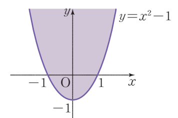
(1) 부등식 $y>f(x)$의 영역은 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분이다.
(2) 부등식 $y<f(x)$의 영역은 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분이다.



참고 (1) 부등식 $y\geq f(x)$가 나타내는 영역은 $y>f(x)$가 나타내는 영역에 경계선 $y=f(x)$를 포함시킨 것이고, 부등식 $y\leq f(x)$의 영역에 대하여도 마찬가지이다.
(2) 부등식의 영역을 나타낼 때에는 경계의 포함 여부를 반드시 구별해야 하는데, 일반적으로 부등식의 영역에 포함되는 경계는 실선으로, 포함되지 않는 경계는 점선으로 나타낸다.

예제 01 부등식 $y\geq x^2-1$의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

풀이 이차함수 $y=x^2-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 부등식 $y\geq x^2-1$의 영역은 그래프의 윗부분이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.
이때 경계선은 포함한다.

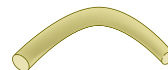


문제 1 다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

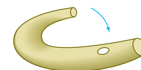
(1) $y\geq x+1$ (2) $2x+y-2<0$
(3) $y<x^2+1$ (4) $x^2+2x+y+1\geq 0$

읽/기/자/료 클라인 병

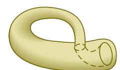
앞면과 뒷면을 구별할 수 없는 띠를 뫼비우스의 띠라고 하는데 뫼비우스의 띠는 긴 종이를 한 번 꼬아 만들 수 있다. 클라인 병은 이처럼 평면적인 뫼비우스의 띠를 입체화한 것이다. 이 병은 병의 양 끝이 연결되어 있어 안과 밖을 구별할 수 없다. 즉, 클라인 병의 안쪽이라고 생각되는 면을 따라가 보면 바깥쪽 면으로 갈 수 있다. 따라서 이 병은 면으로 둘러싼인 공처럼 닫혀 있기도 하고, 안과 밖이 연결되어 열려 있기도 한 두 가지 성질을 모두 가지고 있다.



신축이 자유롭고, 밑면과 윗면이 뚫려 있는 원기둥 모양의 고무관



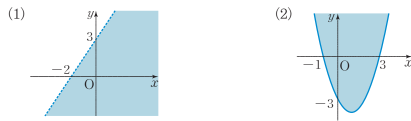
한쪽을 관 속에 집어넣어 바깥에서 양 끝을 맞붙인다.



면이 연결되어 있으므로 면의 안과 밖이 없다.

교과서 193 쪽

문제 2 다음 그림의 색칠한 부분을 부등식으로 나타내어라. (단, 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.)



사고력 기르기

추론
▶의사소통
문제 해결

좌표평면에서 부등식 $x<a$, $y>b$의 영역은 각각 어떻게 나타내어야 하는지 말하여 보자.

원의 내부와 외부는 부등식으로 어떻게 나타내는가?

좌표평면에서 부등식 $x^2+y^2<r^2$의 영역을 나타내어 보자.

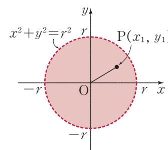
부등식 $x^2+y^2<r^2$을 만족시키는 임의의 점을 $P(x_1,\ y_1)$이라고 하면

$$x_1^2+y_1^2<r^2$$

이다. 이때 원점 O와 점 P 사이의 거리는

$$\overline{OP}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}<r$$

이므로 점 $P(x_1,\ y_1)$은 원 $x^2+y^2=r^2$의 내부에 있다.



거꾸로 원 $x^2+y^2=r^2$의 내부에 있는 한 점을 $P(x_1,\ y_1)$이라고 하면

$$\overline{OP}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}<r$$

에서

$$x_1^2+y_1^2<r^2$$

이므로 점 $P(x_1,\ y_1)$은 부등식 $x^2+y^2<r^2$을 만족시킨다.

따라서 부등식 $x^2+y^2<r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 내부이다.

마찬가지 방법으로 부등식 $x^2+y^2>r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 외부임을 알 수 있다.

2

목표| 좌표평면 위에 색칠한 영역을 부등식으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) 그림의 색칠한 부분은 직선 $3x-2y+6=0$, 즉 $y=\frac{3}{2}x+3$의 아랫부분이고 경계선은 제외하므로 부등식으로 나타내면

$y<\frac{3}{2}x+3$

$\boldsymbol{3x-2y+6>0}$

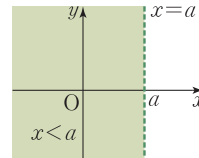
(2) 그림의 색칠한 부분은 포물선 $y=x^2-2x-3$의 윗부분이고 경계선을 포함하므로 부등식으로 나타내면

$\boldsymbol{y\geq x^2-2x-3}$

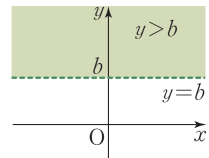
사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 경계선이 좌표축과 평행한 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있게 한다.

풀이| 다음 그림과 같이 부등식 $x<a$의 영역은 직선 $x=a$의 왼쪽 부분(경계선 제외)이고, 부등식 $y>b$의 영역은 직선 $y=b$의 윗부분(경계선 제외)이다.

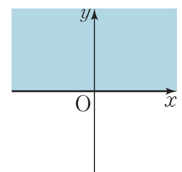


(단, 경계선 제외)



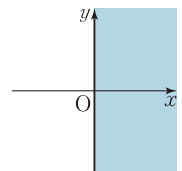
(단, 경계선 제외)

참고| 부등식 $y>0$의 영역은 직선 $y=0$, 즉 x축의 윗부분(경계선 제외)이므로 좌표평면에서 위쪽 반평면이다.



이것은 점 $(x,\ y)$ 중에서 y의 좌표가 $y>0$인 점 전체이기도 하다.

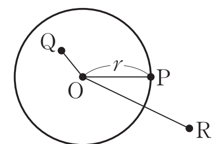
마찬가지로 부등식 $x>0$의 영역은 점 $(x,\ y)$ 중에서 x의 좌표가 $x>0$인 점 전체이므로 오른쪽 반평면이다.



지/도/자/료

원은 정점으로부터 거리가 일정한 모든 점들로 이루어진 도형으로 정의된다.

따라서 정점 O로부터 거리가 r인 임의의 점을 P라고 하면 원의 내부에 있는 점 Q에 대하여



$\overline{OQ}<r$

원의 외부에 있는 점 R에 대하여

$\overline{OR}>r$

를 만족시킨다.

따라서 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x,\ y)$에 대하여 원의 내부를 부등식으로 나타내면 $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<r$, 즉

$x^2+y^2<r^2$

이다. 원 $x^2+y^2=r^2$의 외부도 마찬가지 방법으로 부등식으로 나타내면 $x^2+y^2>r^2$이다.

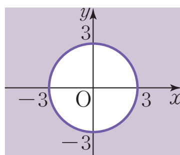
본문 해설

❶ 부등식 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$의 영역은 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 내부이고, 부등식 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$의 영역은 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$의 외부이다.

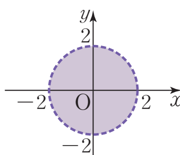
3

목표| 원의 내부와 외부를 좌표평면 위에 나타낼 수 있게 한다.

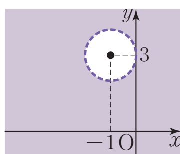
풀이| (1) $x^2+y^2\geq 9$의 영역은 원 $x^2+y^2=9$의 외부이다.
이때 경계선은 포함한다.



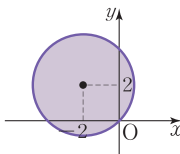
(2) $x^2+y^2-4<0$, 즉 $x^2+y^2<4$ 의 영역은 원 $x^2+y^2=4$ 의 내부이다.
이때 경계선은 제외한다.



(3) $(x+1)^2+(y-3)^2>1$ 의 영역은 원 $(x+1)^2+(y-3)^2=1$ 의 외부이다. 이때 경계선은 제외한다.



(4) $x^2+y^2+4x-4y\leq 0$, 즉 $(x+2)^2+(y-2)^2\leq 8$ 의 영역은 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=8$ 의 내부이다.
이때 경계선은 포함한다.



4

목표| 좌표평면 위에 색칠한 영역을 부등식으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) 중심이 점 $(7,\ 4)$이고, 반지름의 길이가 3인 원의 외부(경계선 제외)이므로
$(x-7)^2+(y-4)^2>9$

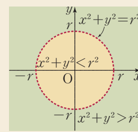
(2) 중심이 점 $(-1,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 2인 원의 내부(경계선 포함)이므로
$(x+1)^2+y^2\leq 4$

교과서 194 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **원의 내부와 외부**

(1) 부등식 $x^2+y^2<r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 내부이다.
(2) 부등식 $x^2+y^2>r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 외부이다.



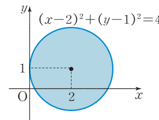
원의 내부는 중심에서의 거리가 반지름의 길이보다 작은 점들의 영역이고, 원의 외부는 중심에서의 거리가 반지름의 길이보다 큰 점들의 영역이다.

예제 02 부등식 $x^2+y^2-4x-2y+1\leq 0$의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

풀이 주어진 부등식을 변형하면

$$(x^2-4x+4)+(y^2-2y+1)\leq 4$$
$$(x-2)^2+(y-1)^2\leq 4$$

이 부등식의 영역은 중심이 점 $(2,\ 1)$이고, 반지름의 길이가 2인 원의 내부이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.
이때 경계선은 포함한다.

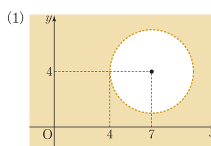


문제 3 다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

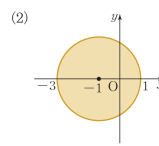
(1) $x^2+y^2\geq 9$
(2) $x^2+y^2-4<0$
(3) $(x+1)^2+(y-3)^2>1$
(4) $x^2+y^2+4x-4y\leq 0$

문제 4 다음 그림의 색칠한 부분을 부등식으로 나타내어라. (단, 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.)

(1)



(2)



읽/기/자/료 푸리에

푸리에

프랑스의 수학자이자 수리과학자인 푸리에(Fourier, J. B. J. ; 1768~1830)는 1794년 나폴레옹 집권 아래 설립된 사범학교의 교사가 되었고, 이어 고등 이공학교에서 수학을 강의하였다.

1798년 나폴레옹이 이집트를 침공할 때, 그를 수행하였고 나폴레옹이 귀국한 후에도 카이로에 체류하여 행정관으로 일하였다.

1801년 귀국한 후 행정 업무를 수행하는 한편, 열전도론을 연구하여 1807년 "열의 해석적 이론"을 제출하였는데, 이 논문은 수학사에 있어서 새롭고 결실이 풍부한 장을 열었다.

그는 1812년 프랑스 학사원의 대상(大賞)을 취득하였으며, 1822년에 임의의 함수가 삼각급수(푸리에 급수)로 표현될 수 있다는 이론을 완성하여 수리물리학 발전에 크게 공헌하였다.

그는 또 실계수 방정식의 해법에 관한 연구로도 알려져 있으며, 부등식의 영역의 연구에도 공헌한 바가 있다.

교과서 195 쪽

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

다음과 같은 방법으로 부등식 $x^2+y^2-2x+2y-2>0$의 영역을 찾아보자.

❶ 부등식 $f(x,\ y)>0$의 영역을 찾기 위하여 방정식 $f(x,\ y)=0$의 그래프를 그린다. 이때 그래프에 의하여 좌표평면은 두 부분으로 나뉜다.
❷ 방정식 $f(x,\ y)=0$의 그래프 위에 있지 않은 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$을 찾는다.
❸ 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이 부등식을 만족시키면 점 P가 있는 부분이 부등식 $f(x,\ y)>0$의 영역이고, 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이 부등식을 만족시키지 않으면 점 P가 있지 않은 부분이 부등식 $f(x,\ y)>0$의 영역이다.

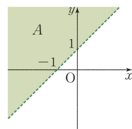
연립부등식의 영역을 어떻게 나타내는가?

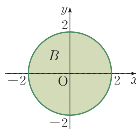
❶ 두 개 이상의 부등식을 동시에 만족시키는 점 전체를 연립부등식의 영역이라고 한다. 연립부등식의 영역은 각 부등식의 영역의 공통부분이다.

예제 03 다음 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

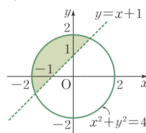
$$\begin{cases} y>x+1 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2\le 4 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

풀이 부등식 ①, ②의 영역을 각각 A, B라고 하면 A, B는 다음 그림과 같다.





따라서 구하는 영역은 위의 두 영역의 공통부분이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.
이때 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.



본문 해설

❶ 연립부등식

$$\begin{cases} f(x,\ y)>0 \\ g(x,\ y)<0 \end{cases}$$

의 영역은 부등식 $f(x,\ y)>0$의 영역과 부등식 $g(x,\ y)<0$의 영역의 공통인 부분이다.
이것은 뒤에 다루는 부등식 $f(x,\ y)g(x,\ y)<0$의 영역과 다른 것임에 유의한다.

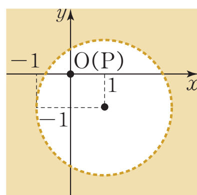
사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 한 점의 좌표를 부등식에 대입하여 주어진 부등식의 영역을 찾을 수 있게 한다.

풀이| ❶ 부등식 $x^2+y^2-2x+2y-2>0$의 영역을 찾기 위하여 방정식 $x^2+y^2-2x+2y-2=0$, 즉 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$의 그래프를 그린다.

❷ 방정식 $x^2+y^2-2x+2y-2=0$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면 성립하지 않으므로 방정식 $x^2+y^2-2x+2y-2=0$의 그래프의 위에 있지 않은 점 P를 $\mathrm{P}(0,\ 0)$으로 놓는다.

❸ $\mathrm{P}(0,\ 0)$을 부등식 $x^2+y^2-2x+2y-2>0$에 대입하면 $-2>0$이므로 부등식을 만족시키지 않는다.
따라서 구하는 부등식의 영역은 오른쪽 그림과 같이 점 P가 있지 않은 영역이다. 이때 경계선은 제외한다.



지/도/자/료

두 다항식의 곱으로 이루어진 부등식의 영역은 다음과 같이 실수에서의 부등식의 성질을 이용하여 구할 수 있다.

$AB>0$이면 $\begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$

$AB<0$이면 $\begin{cases} A>0 \\ B<0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A<0 \\ B>0 \end{cases}$

$AB\ge 0$이면 $\begin{cases} A\ge 0 \\ B\ge 0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A\le 0 \\ B\le 0 \end{cases}$

$AB\le 0$이면 $\begin{cases} A\ge 0 \\ B\le 0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A\le 0 \\ B\ge 0 \end{cases}$

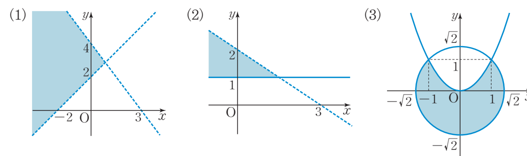
교과서 196 쪽

문제 5 다음 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $\begin{cases} y \geq x-3 \\ x+2y-3>0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x+y-1 \geq 0 \\ y \leq x^2 \end{cases}$

(3) $-x-1<y\leq 2x-1$ (4) $1\leq x^2+y^2<4$

문제 6 다음 그림의 색칠한 부분을 연립부등식으로 나타내어라. (단, 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.)



예제 04 다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

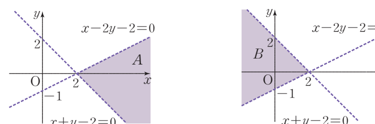
$$(x+y-2)(x-2y-2)>0$$

● $AB>0$의 영역 $\begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$

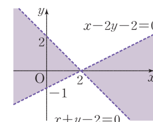
풀이 주어진 부등식이 성립하는 것은 다음의 두 경우이다.

$\begin{cases} x+y-2>0 \\ x-2y-2>0 \end{cases}$ …… ① 또는 $\begin{cases} x+y-2<0 \\ x-2y-2<0 \end{cases}$ …… ②

연립부등식 ①, ②의 영역을 각각 A, B라고 하면 A, B는 다음 그림과 같다.



주어진 부등식이 성립하는 것은 ① 또는 ②의 경우이므로 구하는 부등식의 영역은 위 두 영역 모두이다. 따라서 구하는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다. 이때 경계선은 제외한다.

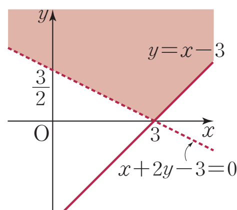


5

목표| 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있게 한다.

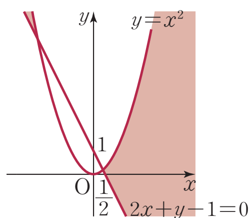
풀이| (1) $x+2y-3>0$에서 $y>-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

따라서 구하는 영역은 직선 $y=x-3$의 윗부분(경계선 포함)과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$의 윗부분(경계선 제외)의 공통부분이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.



(2) $2x+y-1\geq 0$에서 $y\geq -2x+1$

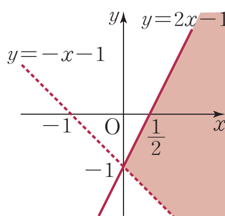
따라서 구하는 영역은 포물선 $y=x^2$의 아랫부분(경계선 포함)과 직선 $y=-2x+1$의 윗부분(경계선 포함)의 공통부분이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.



(3) 주어진 연립부등식은 연립부등식 $\begin{cases} -x-1<y \\ y\leq 2x-1 \end{cases}$ 과 같다.

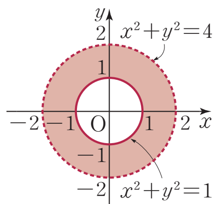
$-x-1<y$에서 $y>-x-1$

따라서 구하는 영역은 직선 $y=-x-1$의 윗부분(경계선 제외)과 직선 $y=2x-1$의 아랫부분(경계선 포함)의 공통부분이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.



(4) 주어진 연립부등식은 연립부등식 $\begin{cases} x^2+y^2\geq 1 \\ x^2+y^2<4 \end{cases}$ 와 같다.

따라서 구하는 영역은 원 $x^2+y^2=1$의 외부(경계선 포함)와 원 $x^2+y^2=4$의 내부(경계선 제외)의 공통부분이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.



6

목표| 좌표평면 위에 색칠한 영역을 연립부등식으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) 직선 $y=x+2$의 윗부분(경계선 제외)과 직선 $y=-\frac{4}{3}x+4$의 아랫부분(경계선 제외)의 공통부분이므로 $\begin{cases} y>x+2 \\ y<-\frac{4}{3}x+4 \end{cases}$

(2) 직선 $y=1$의 윗부분(경계선 포함)과 직선 $y=-\frac{2}{3}x+2$의 아랫부분(경계선 제외)의 공통부분이므로 $\begin{cases} y\geq 1 \\ y<-\frac{2}{3}x+2 \end{cases}$

(3) 포물선 $y=x^2$의 아랫부분(경계선 포함)과 원 $x^2+y^2=2$의 내부(경계선 포함)의 공통부분이므로 $\begin{cases} y\leq x^2 \\ x^2+y^2\leq 2 \end{cases}$

교과서 197 쪽

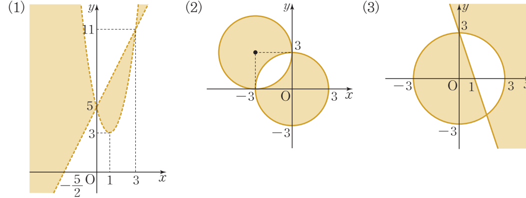
문제 7 다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라.

$AB\le 0$의 영역 $\begin{cases}A\ge 0\\B\le 0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}A\le 0\\B\ge 0\end{cases}$

(1) $(x-3y+3)(-2x-y+1)\le 0$ (2) $(x-y+3)(x^2+y-5)<0$

(3) $(2x+y+1)(x^2+y^2-4)\ge 0$ (4) $(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)>0$

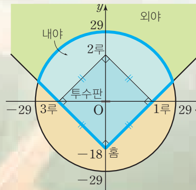
발전 **문제 8** 다음 그림의 색칠한 부분을 부등식으로 나타내어라. (단, 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.)



단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 어떤 야구장을 투수판을 원점으로 하여 좌표평면 위에 나타내었다. 투수판에서 홈까지의 거리는 18 m이고, 내야와 외야의 경계선은 투수판을 중심으로 하고 반지름의 길이가 29 m인 원의 일부일 때, 내야를 부등식으로 나타내어라. (단, 경계선은 제외한다.)



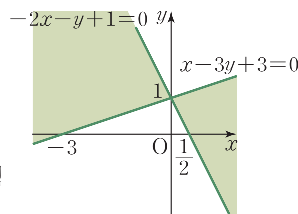
7

목표| 두 식의 곱으로 표현된 부등식의 영역을 좌표평면에 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\begin{cases}x-3y+3\ge 0\\-2x-y+1\le 0\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x-3y+3\le 0\\-2x-y+1\ge 0\end{cases}$

이므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.

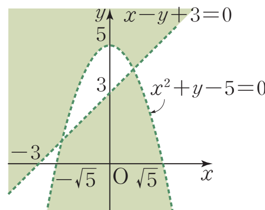


(단, 경계선 포함)

(2) $\begin{cases}x-y+3>0\\x^2+y-5<0\end{cases}$

또는 $\begin{cases}x-y+3<0\\x^2+y-5>0\end{cases}$ 이므로

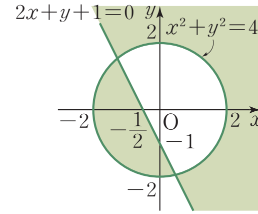
오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.



(단, 경계선 제외)

(3) $\begin{cases}2x+y+1\ge 0\\x^2+y^2-4\ge 0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}2x+y+1\le 0\\x^2+y^2-4\le 0\end{cases}$ 이므로

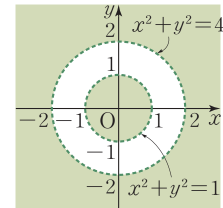
다음 그림의 색칠한 부분이다.



(단, 경계선 포함)

(4) $\begin{cases}x^2+y^2-1>0\\x^2+y^2-4>0\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x^2+y^2-1<0\\x^2+y^2-4<0\end{cases}$ 이므로

다음 그림의 색칠한 부분이다.



(단, 경계선 제외)

8

목표| 좌표평면 위에 색칠된 영역을 두 식의 곱으로 표현된 부등식으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $(2x-y+5)(2x^2-4x-y+5)<0$

(2) $(x^2+y^2+6x-6y+9)(x^2+y^2-9)\le 0$

(3) $(3x+y-3)(x^2+y^2-9)\ge 0$

단원 과제

목표| 야구장의 내야를 연립부등식으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| 홈과 1루를 연결하는 직선의 방정식은 $y=x-18$

홈과 3루를 연결하는 직선의 방정식은 $y=-x-18$

투수판을 중심으로 하고 반지름의 길이가 29인 원의 방정식은 $x^2+y^2=29^2$

따라서 내야는 두 직선의 윗부분과 원의 내부의 공통부분(경계선 제외)이므로 다음과 같이 연립부등식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{cases}y>x-18\\y>-x-18\\x^2+y^2<29^2\end{cases}$$

02 부등식의 영역에서의 최대, 최소

소단원 지도 목표

① 연립부등식의 영역에 속하는 점 (x, y)에 대하여 x, y에 대한 일차식의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.
② 부등식의 영역을 이용하여 실생활에서의 간단한 최대, 최소 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 최대, 최소 문제는 부등식의 영역에서 이해할 수 있는 간단한 소재를 택하여 다룬다.

2. 부등식의 영역에서 최댓값과 최솟값을 구할 때에는 좌표평면 위에 나타내어 해결하도록 하며, 어떤 경우에 최대, 최소가 되는지 이해하게 한다.

교과서 198 쪽

02 부등식의 영역에서의 최대, 최소

● 부등식의 영역을 활용하여 최대, 최소 문제를 해결할 수 있다.

부등식의 영역에서 최댓값과 최솟값을 어떻게 구하는가?

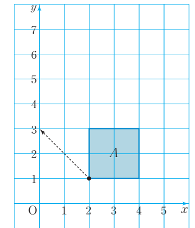
생각 열기 **선형계획법**

선형계획법은 일차부등식 또는 일차방정식을 만족시키는 제한 조건 아래에서 목적의 달성도를 최대로 하는 가장 좋은 방법을 구하는 수학적 기법이다. 이 기법은 제2차 세계 대전 중 군사에 필요한 자재의 구입이나 군인의 수송 등 군사 계획 기술로서 발전하였다. 그 후 기업의 경영 계획이나 국가 경제 운영 등에 광범위하게 이용되어 경비 절감을 실현하는 기본적인 방법으로 인식되고 있다.

탐구 활동 **오른쪽 그림과 같은 좌표평면 위의 영역 A에 대하여 다음 물음에 답하여 보자. (단, 경계선은 포함한다.)**

1. 영역 A에 속하는 모든 점 (x, y)를 $(0, x+y)$에 대응시킨다고 하자. 예를 들어 점 $(2, 1)$을 점 $(0, 2+1)$, 즉 $(0, 3)$에 대응시킨다. 이때 $x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하여 보자.

2. **1**에서 구한 최댓값과 최솟값을 가지도록 하는 영역 A 위의 점을 구하여 보자.



좌표평면에서 연립부등식

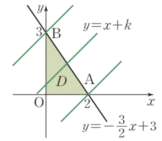
$$x\ge0,\ y\ge0,\ y\le-\frac{3}{2}x+3$$

의 영역에 속하는 점 (x, y)에 대하여 일차식 $y-x$의 최댓값과 최솟값을 구하여 보자.

주어진 연립부등식의 영역을 D라고 하면 D는 오른쪽 그림에서 색칠한 삼각형 OAB와 그 내부이다. 이때 $y-x=k$ (k는 상수)로 놓으면

$$y=x+k$$

이므로 직선 $y=x+k$가 영역 D와 만날 때의 y절편인 k의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.



생각 열기 참/고/자/료

선형계획법(linear programming)은 제2차 세계대전 중 미국을 중심으로 하여 군사계획기술로서 발전하였으며, 그 후 기업의 경영 계획이나 경제 분석에서 새로운 방법으로 각광을 받게 되었다.
선형이란 계획을 세울 경우 기초가 되는 상호관계가 일차식의 형식임을 나타낸다. 바꾸어 말하면 일차부등식을 조건으로 하는 일차함수의 최대 또는 최소를 구하는 형식인데, 이 형식을 써서 분석이 이루어지는 경우 이를 선형계획법이라고 한다.
한정된 자원을 어떻게 해야 가장 유효적절하게 각종 용도에 배분할 수 있는지를 분석하는 최적배치와 생산계획의 문제, 한정된 총소득액의 최적배분, 몇몇 발송지역에서부터 몇몇 목적지로 상품을 운송할 때 그 운임을 최소화하는 수송문제 등, 일차부등식이라는 제약 아래에서 어떤 목적을 최대화 또는 최소화하려는 문제에 모두 적용된다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 영역 A에 속하는 모든 점 (x, y)를 $(0, x+y)$에 대응시키는 것은 영역 A에서 일차식 $x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하는 것과 같음을 발견하게 하여 부등식의 영역에서 최대, 최소 문제를 해결하는 데 토대가 되도록 한다.

1. 영역 A에 속하는 모든 점 (x, y)를 $(0, x+y)$에 대응시키면 $x+y$의 값의 범위는 $3\le x+y\le7$
따라서 $x+y$의 최댓값은 **7**이고, 최솟값은 **3**이다.

2. 점 $(0, 7)$은 영역 A 위의 점 $(4, 3)$에서 대응시킨 점이므로 $x+y$가 최댓값 7을 가지도록 하는 점의 좌표는 $\mathbf{(4,\ 3)}$
점 $(0, 3)$은 영역 A 위의 점 $(2, 1)$에서 대응시킨 점이므로 $x+y$가 최솟값 3을 가지도록 하는 점의 좌표는 $\mathbf{(2,\ 1)}$

교과서 199 쪽

직선 $y=x+k$가 영역 D를 지나도록 평행이동하면서 움직여 보면 k의 값은 직선 $y=x+k$가

점 B$(0,\ 3)$을 지날 때 최대가 되고, 최댓값은 $k=3$

점 A$(2,\ 0)$을 지날 때 최소가 되고, 최솟값은 $k=-2$

이다. 따라서 $y-x$의 최댓값은 3이고, 최솟값은 -2이다.

일반적으로 부등식의 영역에서 식 $f(x,\ y)$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

부등식의 영역에서의 최대, 최소

❶ 주어진 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낸다.

❶ ❷ $f(x,\ y)=k$ (k는 상수)로 놓고, 이 그래프를 부등식의 영역과 만나도록 움직여 본다.

❸ k의 값 중에서 최댓값과 최솟값을 구한다.

예제 01 $x,\ y$가 세 부등식 $x\ge1,\ y\ge0,\ x+y\le3$을 동시에 만족시킬 때, 일차식 $x-y$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

풀이 주어진 연립부등식의 영역을 D라고 하면 D는 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC와 그 내부이다.

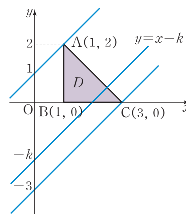
$x-y=k$ (k는 상수)로 놓으면

$$y=x-k$$

이므로 이것은 기울기가 1이고, y절편이 $-k$인 직선이다.

직선 $y=x-k$가 영역 D와 만나도록 움직여 보면 점 C$(3,\ 0)$을 지날 때 k의 값이 최대이고, 점 A$(1,\ 2)$를 지날 때 k의 값이 최소임을 알 수 있다.

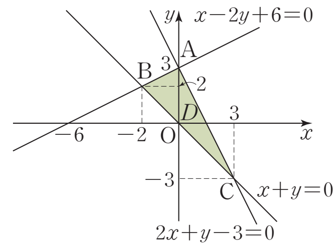
따라서 $x-y$의 최댓값은 3이고, 최솟값은 -1이다.



답 최댓값: 3, 최솟값: -1

문제 1 $x,\ y$가 세 부등식 $x+y\ge0,\ x-2y+6\ge0,\ 2x+y-3\le0$을 동시에 만족시킬 때, 다음 일차식의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $-x+y$ (2) $2x-y$



(1) $-x+y=k$ (k는 상수)로 놓으면 $y=x+k$이므로 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다. 직선 $y=x+k$가 영역 D와 만나도록 움직여보면 점 B$(-2,\ 2)$를 지날 때 k의 값이 최대이고, 점 C$(3,\ -3)$을 지날 때 k의 값이 최소임을 알 수 있다.
따라서 $-x+y$의 최댓값은 **4**이고, 최솟값은 **-6**이다.

(2) $2x-y=k$ (k는 상수)로 놓으면 $y=2x-k$이므로 기울기가 2이고 y절편이 $-k$인 직선이다. 직선 $y=2x-k$가 영역 D와 만나도록 움직여 보면 점 C$(3,\ -3)$을 지날 때, k의 값이 최대이고, 점 B$(-2,\ 2)$를 지날 때 k의 값이 최소임을 알 수 있다.
따라서 $2x-y$의 최댓값은 **9**이고, 최솟값은 **-6**이다.

본문 해설

❶ $f(x,\ y)$가 일차식 $ax+by$라고 하면

$ax+by=k$ ……①

로 놓는다. 이때 $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{k}{b}$이므로 k의 값이 변해도 직선 ①의 기울기는 $-\dfrac{a}{b}$로 변하지 않는다. 즉, ①은 k의 값에 관계없이 평행한 직선이므로 기울기가 $-\dfrac{a}{b}$인 직선을 주어진 부등식의 영역과 만나도록 평행하게 움직여 보며 일차식 $ax+by$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

1

목표| 경계가 삼각형인 연립부등식의 영역에서 일차식의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 연립부등식의 영역을 D라고 하면 D는 다음 그림에서 삼각형 ABC와 그 내부이다.

지/도/자/료

1. 주어진 연립부등식을 만족시키는 영역에서 일차식 $ax+by$의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제는 먼저 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 정확하게 나타내어야 한다. 이때 x절편, y절편, 직선의 기울기, 두 직선의 교점 등을 구하면 편리하다.

$ax+by=k$ $(b\neq0)$로 놓으면 $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{k}{b}$이므로 기울기는 $-\dfrac{a}{b}$이다. 또한 y절편 $\dfrac{k}{b}$는 k의 값에 따라 변하며 $b>0$일 때에는 y절편이 최대일 때 k가 최대이고, $b<0$일 때에는 y절편이 최소일 때 k가 최대이다.

2. 일차식 $ax+by$의 최댓값과 최솟값은 주어진 부등식의 영역의 경계가 다각형일 때에는 직선 $ax+by=k$가 다각형의 꼭짓점을 지날 때인 경우가 많고, 부등식의 영역의 경계가 곡선일 때에는 직선 $ax+by=k$가 곡선에 접할 때인 경우가 많다.

2

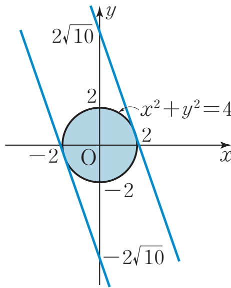
목표 | 경계가 원인 부등식의 영역에서 일차식의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | 부등식 $x^2+y^2\leq 4$의 영역은 원 $x^2+y^2=4$와 그 내부(경계선 포함)이다.

$3x+y=k$(k는 상수)로 놓으면

$y=-3x+k$이므로

기울기가 -3이고 y절편이 k인 직선이다.



이 직선이 부등식 $x^2+y^2\leq 4$의 영역과 만나도록 움직여 보면 원과 접할 때 k의 값이 최대 또는 최소이다.

원 $x^2+y^2=4$에 접하고 기울기가 -3인 직선의 방정식은 $y=-3x\pm 2\sqrt{10}$

따라서 $3x+y$의 최댓값은 $\mathbf{2\sqrt{10}}$이고, 최솟값은 $\mathbf{-2\sqrt{10}}$이다.

교과서 200 쪽

발전 **문제 2** x, y가 부등식 $x^2+y^2\leq 4$를 만족시킬 때, 일차식 $3x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

부등식의 영역을 활용하여 실생활에서 최대, 최소 문제를 해결하여 보자.

예제 02 두 약품 A, B 각각 1 g에 들어 있는 성분 P, Q의 양과 1 g당 가격이 오른쪽 표와 같다. 약품 A, B로 성분 P를 10 mg 이상, 성분 Q를 9 mg 이상 복용하려고 할 때, 비용이 최소가 되도록 하는 약품 A, B의 양과 이때의 비용을 구하여라.

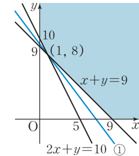
약품	성분		가격 (천 원)
	P(mg)	Q(mg)	
A	2	1	4
B	1	1	3

1 mg은 1 g의 $\frac{1}{1000}$이다.

풀이 약품 A, B를 각각 x g, y g 섭취한다고 하면 다음 네 개의 부등식을 얻을 수 있다.

$$x\geq 0,\ y\geq 0,\ 2x+y\geq 10,\ x+y\geq 9$$

이 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.



약품 A, B를 복용하는 데 필요한 비용을 k천 원이라고 하면

$$4x+3y=k \qquad \cdots\cdots ①$$

이고, k가 최소인 경우는 직선 ①이 두 직선

$$2x+y=10,\ x+y=9$$

의 교점 (1, 8)을 지날 때이다.

따라서 A를 1 g, B를 8 g 섭취할 때 비용이 최소가 되며, 이때의 비용은

$$4\times 1+3\times 8=28$$

이므로 2만 8천 원이다.

답 A: 1 g, B: 8 g, 2만 8천 원

문제 3 어느 공장에서 두 제품 A, B를 각각 1개씩 생산하는 데 필요한 원료 P, Q의 양과 얻어지는 이익이 오른쪽 표와 같다. 하루 동안 사용할 수 있는 원료 P, Q의 양이 각각 최대 150 kg, 160 kg이라고 할 때, 이익이 최대가 되도록 하는 제품 A, B의 개수와 이때의 이익을 구하여라.

제품	원료		이익 (천 원)
	P(kg)	Q(kg)	
A	3	2	3
B	3	4	4

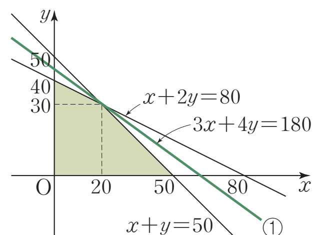
3

목표 | 실생활 문제에서 부등식의 영역을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 | 제품 A, B의 개수를 각각 x, y라고 하면 다음 네 개의 부등식을 얻을 수 있다.

$x\geq 0$, $y\geq 0$, $x+y\leq 50$, $x+2y\leq 80$

이 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다. 두 제품 A, B를 생산하여 얻는 이익을 k(천 원)이라고 하면



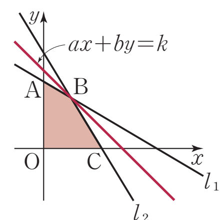
$$3x+4y=k \qquad \cdots\cdots ①$$

이고, k가 최대인 경우는 직선 ①이 두 직선 $x+y=50$, $x+2y=80$의 교점 (20, 30)을 지날 때이다.

따라서 제품 A **20개**, 제품 B **30개**를 생산할 때, 이익이 최대가 되며 이때의 이익은 $3\times 20+4\times 30=180$(천 원), 즉 **18만 원**이다.

지/도/자/료

오른쪽 그림에서 영역의 꼭짓점을 O, A, B, C, 직선 l_1과 l_2의 기울기를 각각 m_1, m_2 $(m_2<m_1<0)$라고 하면 y절편의 최대, 최소는 다음과 같다.



(i) $m_2<-\dfrac{a}{b}<m_1$인 경우

점 B를 지날 때 최대, 점 O를 지날 때 최소이다.

(ii) $m_2>-\dfrac{a}{b}$인 경우

점 C를 지날 때 최대, 점 O를 지날 때 최소이다.

(iii) $m_1<-\dfrac{a}{b}$인 경우

점 A를 지날 때 최대, 점 O를 지날 때 최소이다.

교과서 201 쪽

중단원 기초

[해답 p.235]

수준별 학습

1 다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라. — 01 부등식의 영역

(1) $y>2x+4$　(2) $2x+5y-10\le0$

(3) $y\ge x^2-4$　(4) $y<(x-1)^2$

2 다음 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라. — 01 부등식의 영역 원의 내부와 외부

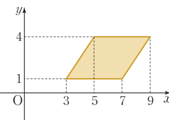
(1) $x^2+y^2\le3$　(2) $(x-2)^2+y^2\ge4$

(3) $x^2+(y+3)^2>1$　(4) $(x+1)^2+(y+2)^2<9$

3 다음 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라. — 01 부등식의 영역 연립부등식의 영역

(1) $\begin{cases} y<x \\ y>-\dfrac{x}{2}+2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} y\ge x-2 \\ x^2+y^2\ge9 \end{cases}$

4 점 $(x,\ y)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 속하는 점이다. 이때 일차식 $2x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하여라. (단, 경계선은 포함한다.) — 02 부등식의 영역에서의 최대, 최소



5 x, y가 다음 부등식을 동시에 만족시킬 때, 일차식 $y-2x$의 최댓값과 최솟값을 구하여라. — 02 부등식의 영역에서의 최대, 최소

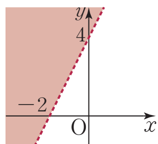
$x\ge0,\ y\ge0,\ x+y\le4$

중/단/원 기초

1

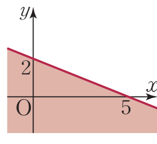
목표| 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1)



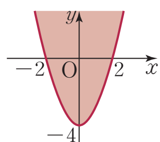
(단, 경계선 제외)

(2)



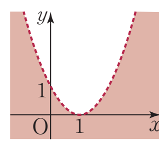
(단, 경계선 포함)

(3)



(단, 경계선 포함)

(4)

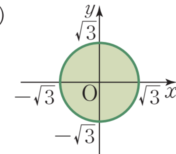


(단, 경계선 제외)

2

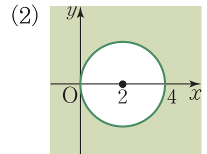
목표| 원의 내부와 외부를 좌표평면 위에 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1)



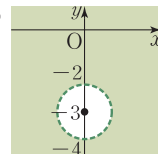
(단, 경계선 포함)

(2)



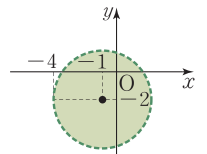
(단, 경계선 포함)

(3)



(단, 경계선 제외)

(4)

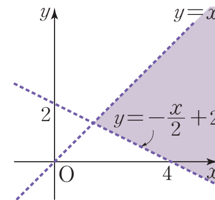


(단, 경계선 제외)

3

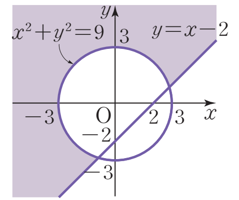
목표| 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1)



(단, 경계선 제외)

(2)



(단, 경계선 포함)

4

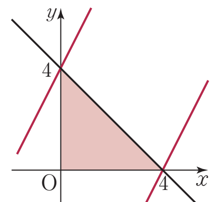
목표| 경계가 사각형인 부등식의 영역에서 일차식의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 직선 $2x+y=k$, 즉 $y=-2x+k$를 색칠한 부분과 만나도록 움직여 보면 k의 최댓값은 점 $(9,\ 4)$를 지날 때 **22**이고, 최솟값은 점 $(3,\ 1)$을 지날 때 **7**이다.

5

목표| 경계가 삼각형인 연립부등식의 영역에서 일차식의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.



직선 $y-2x=k$, 즉 $y=2x+k$를 부등식의 영역과 만나도록 움직여 보면 k의 최댓값은 점 $(0,\ 4)$를 지날 때 **4**이고, 최솟값은 점 $(4,\ 0)$을 지날 때 **−8**이다.

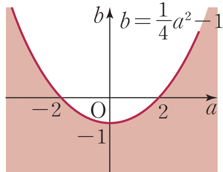
중/단/원 기본

1

목표| 이차방정식이 실근을 가지기 위한 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있게 한다.

풀이| 이차방정식 $x^2+ax+b+1=0$의 판별식을 D라고 하면 $D=a^2-4(b+1)\geq0$

$b\leq\frac{1}{4}a^2-1$



(단, 경계선 포함)

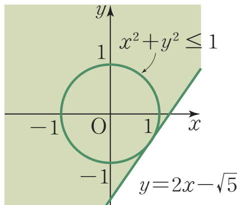
2

목표| 좌표평면 위에서 부등식의 영역의 포함 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 원 $x^2+y^2=1$에 접하고, 기울기가 2인 직선의 방정식은 $y=2x\pm\sqrt{5}$

오른쪽 그림에서 부등식 $x^2+y^2\leq1$의 영역이 부등식 $y\geq2x+k$의 영역에 포함되도록 하는 실수 k값의 범위는

$\boldsymbol{k\leq-\sqrt{5}}$



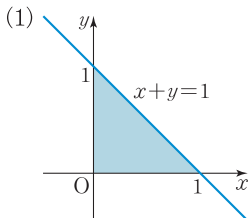
(단, 경계선 포함)

3

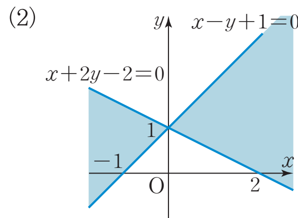
목표| 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낼 수 있게 한다.

풀이| 실선으로 표시된 경계선은 포함하고 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.

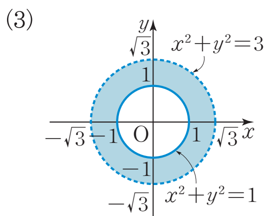
(1)



(2)



(3)



교과서 202 쪽

중단원 기본

[해답 p.235]

수준별 학습

1 이차방정식 $x^2+ax+b+1=0$이 실근을 가질 때, 점 $(a,\ b)$가 존재하는 영역을 좌표평면 위에 나타내어라. — 01 부등식의 영역

2 부등식 $x^2+y^2\leq1$의 영역이 부등식 $y\geq2x+k$의 영역에 포함될 때, 실수 k값의 범위를 구하여라. — 01 부등식의 영역 원의 내부와 외부

3 다음 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내어라. — 01 부등식의 영역 연립부등식의 영역

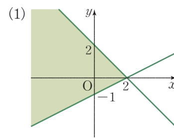
(1) $x\geq0,\ y\geq0,\ x+y\leq1$

(2) $(x-y+1)(x+2y-2)\geq0$

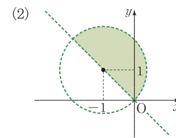
(3) $1\leq x^2+y^2<3$

4 다음 그림의 색칠한 부분을 연립부등식으로 나타내어라. (단, 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.) — 01 부등식의 영역 연립부등식의 영역

(1)



(2)



5 $x,\ y$가 다음 부등식을 동시에 만족시킬 때, 일차식 $2x-y$의 최댓값과 최솟값을 구하여라. — 02 부등식의 영역에서의 최대, 최소

$y\geq x^2,\ y\leq x+2$

4

목표| 좌표평면 위의 영역을 연립부등식으로 나타낼 수 있게 한다.

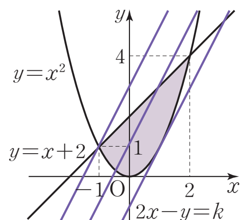
풀이| (1) $\begin{cases} y\leq-x+2 \\ y\geq\frac{1}{2}x-1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (x+1)^2+(y-1)^2<2 \\ y>-x \end{cases}$

5

목표| 연립부등식의 영역에서 일차식의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)이다.

직선 $2x-y=k$, 즉 $y=2x-k$를 부등식의 영역과 만나도록 움직여 보면 k의 최댓값은 $y=x^2$에 접할 때 **1**이고, k의 최솟값은 점 $(-1,\ 1)$을 지날 때 **-3**이다.



교과서 203 쪽

중단원 실력

[해답 p.236]

수준별 학습

1 점 $(2a,\ a)$가 세 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$, $\mathrm{B}(-1,\ 1)$, $\mathrm{C}(3,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 내부에 있을 때, 실수 a값의 범위를 구하여라.

01 부등식의 영역 — 연립부등식의 영역

2 부등식 $x^2+y^2\le r^2$의 영역이 부등식 $(x+y-\sqrt{2})(x^2+y^2-4)\ge 0$의 영역에 포함되도록 하는 양수 r의 최댓값을 구하여라.

01 부등식의 영역 — 연립부등식의 영역

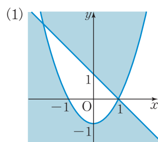
3 연립부등식 $\begin{cases} x^2+y^2\le 9 \\ (x-a)^2+y^2\le 1 \end{cases}$ 을 만족시키는 영역의 넓이가 최대가 되도록 하는 실수 a값의 범위를 구하여라.

01 부등식의 영역 — 연립부등식의 영역

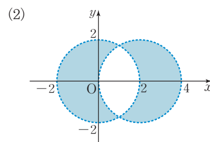
4 다음 그림의 색칠한 부분을 부등식으로 나타내어라. (단, 실선으로 표시된 경계선은 포함하고, 점선으로 표시된 경계선은 제외한다.)

01 부등식의 영역 — 연립부등식의 영역

(1)



(2)



5 오른쪽 표는 어느 공장에서 두 종류의 벽돌 A, B를 각각 한 개씩 생산하는 데 필요한 모래와 시멘트의 양과 벽돌 한 개당 얻을 수 있는 이익을 나타낸 것이다. 모래와 시멘트를 각각 4400 g, 5600 g이 넘지 않게 사용하여야 할 때, 이익이 최대가 되도록 하는 벽돌 A, B의 개수와 이때의 이익을 구하여라.

벽돌	모래(g)	시멘트(g)	이익(원)
A	300	200	400
B	200	400	500

02 부등식의 영역에서의 최대, 최소

중/단/원 실력

1

목표| 삼각형의 내부를 부등식의 영역으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| 삼각형 ABC의 내부에 있는 점 $(2a,\ a)$는 세 부등식

$y<3x+4,\ y<-x+4,\ y>1$

을 동시에 만족시켜야 하므로

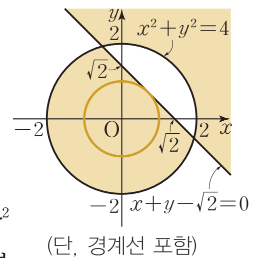
$a<6a+4,\ a<-2a+4,\ a>1$

따라서 $\mathbf{1<a<\frac{4}{3}}$이다.

2

목표| 좌표평면 위에서 부등식의 영역의 포함 관계를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 부등식 $(x+y-\sqrt{2})(x^2+y^2-4)\ge 0$의 영역은 다음 그림과 같다.



(단, 경계선 포함)

원 $x^2+y^2=r^2$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x+y-\sqrt{2}=0$ 사이의 거리는 $\frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}}=1$이므로 부등식 $x^2+y^2\le r^2$의 영역이 색칠한 부분에 포함되려면 $0<r\le 1$이어야 한다.

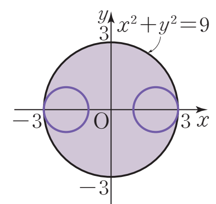
따라서 양수 r의 최댓값은 **1**이다.

3

목표| 좌표평면에서 연립부등식의 영역의 넓이가 최대가 되게 하는 상수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 부등식 $(x-a)^2+y^2\le 1$의 영역이 $x^2+y^2\le 9$의 영역에 포함되어야 하므로

$\mathbf{-2\le a\le 2}$



4

목표| 좌표평면 위에 나타난 영역을 두 식의 곱으로 표현된 부등식으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $\mathbf{(x+y-1)(x^2-y-1)\le 0}$

(2) $\mathbf{(x^2+y^2-4)(x^2+y^2-4x)<0}$

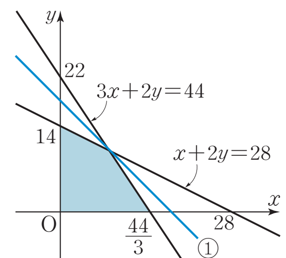
5

목표| 실생활 문제에서 부등식의 영역을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 벽돌 A, B를 각각 x개, y개 생산한다고 하면 다음 네 개의 부등식을 얻을 수 있다.

$x\ge 0,\ y\ge 0,\ 3x+2y\le 44,$

$x+2y\le 28$



이 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다. 벽돌 A, B를 생산하여 얻는 이익을 k라고 하면

$400x+500y=k$ (k는 상수) …… ①

이고, k가 최대인 경우는 직선 ①이 두 직선 $3x+2y=44,\ x+2y=28$의 교점 $(8,\ 10)$을 지날 때이다. 따라서 벽돌 A는 **8**개, 벽돌 B는 **10**개를 생산할 때 이익이 최대가 되며, 이때의 이익은 **8200**원이다.

수행 과제

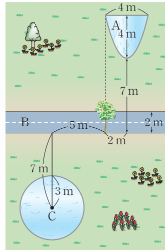
공원을 좌표평면 위에 나타내기

오른쪽 그림과 같이 어느 공원에 폭이 2 m인 자전거 도로 B와 두 개의 연못 A, C가 있다.

연못 A의 경계는 도로 B와 평행한 직선과 포물선 모양의 곡선으로 이루어져 있고, 공원 가운데의 나무를 기준으로 오른쪽으로 2 m, 위쪽으로 7 m 떨어진 지점에 포물선의 꼭짓점이 위치한다.

연못 C의 경계는 공원 가운데의 나무를 기준으로 왼쪽으로 5 m, 아래쪽으로 7 m 떨어진 지점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3 m인 원 모양이다.

(단, 나무의 크기는 무시한다.)



| 과 제 | 1 공원 가운데의 나무를 원점 O로 하여 공원을 좌표평면 위에 나타내어라.

| 과 제 | 2 과제 1의 두 연못 A, C와 자전거 도로 B의 영역을 부등식으로 나타내어라.

대단원 학습 내용 정리

1 평면좌표

두 점 사이의 거리

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

선분을 내분하는 점과 외분하는 점

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P와 외분하는 점 Q의 좌표는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right) \text{ (단, } m\neq n)$$

2 직선의 방정식

직선의 방정식

(1) 점 (x_1, y_1)을 지나고, 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

(2) 서로 다른 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은

(i) $x_1\neq x_2$일 때 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

(ii) $x_1=x_2$일 때 $x=x_1$

두 직선의 평행, 일치, 수직

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이

(1) 평행하면 $m=m'$, $n\neq n'$

(2) 일치하면 $m=m'$, $n=n'$

(3) 수직이면 $mm'=-1$

점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3 원의 방정식

원의 방정식

중심이 $C(a, b)$이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

원의 접선의 방정식

(1) 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고, 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

(2) 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2$$

4 도형의 이동

평행이동

(1) 점 $P(x, y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점 P′의 좌표는 $P'(x+a, y+b)$

(2) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-a, y-b)=0$$

대칭이동

(1) 점 (x, y)를 대칭이동한 점의 좌표는

(i) x축에 대한 대칭이동: $(x, -y)$

(ii) y축에 대한 대칭이동: $(-x, y)$

(iii) 원점에 대한 대칭이동: $(-x, -y)$

(iv) 직선 $y=x$에 대한 대칭이동: (y, x)

(2) 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 대칭이동한 도형의 방정식은

(i) x축에 대한 대칭이동: $f(x, -y)=0$

(ii) y축에 대한 대칭이동: $f(-x, y)=0$

(iii) 원점에 대한 대칭이동: $f(-x, -y)=0$

(iv) 직선 $y=x$에 대한 대칭이동: $f(y, x)=0$

5 부등식의 영역

부등식의 영역

부등식 $y>f(x)$의 영역은 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분이고, 부등식 $y<f(x)$의 영역은 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분이다.

원의 내부와 외부

부등식 $x^2+y^2<r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 내부이고, 부등식 $x^2+y^2>r^2$의 영역은 원 $x^2+y^2=r^2$의 외부이다.

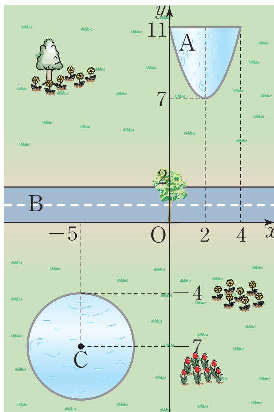
| 용어와 기호 | 내분, 외분, 대칭이동, $f(x, y)=0$

수행 과제

● 수행 과제 의도

공원의 도로와 연못 등을 부등식의 영역을 이용하여 좌표평면에 나타내어 봄으로써 단원에서 학습한 내용과 실생활이 서로 관련되어 있음을 이해시키기 위한 것이다.

과제 1 _풀이



과제 2 _풀이

A: $\begin{cases} y\leq 11 \\ y\geq x^2-4x+11 \end{cases}$

B: $0\leq y\leq 2$

C: $(x+5)^2+(y+7)^2\leq 9$

읽/기/자/료 도시공원

도시공원이란 국토의 계획 및 이용에 관한 법률에 의한 공원으로서 도시 지역 안에서 도시 자연 경관의 보호와 시민의 건강, 휴양 및 정서 생활의 향상에 기여하기 위하여 같은 법의 규정에 의한 도시관리계획으로 결정된 것을 말한다.

2005년 3월 31일 법률 제7476호로 전문 개정된 도시공원 및 녹지 등에 관한 법률에 의하면 도시공원은 그 기능 및 주제에 의하여 생활권공원, 주제공원으로 분류하고, 다시 생활권공원을 소공원, 어린이공원, 근린공원 등으로 세분한다.

대 / 단 / 원 평가 문제

Ⅲ. 도형의 방정식

선택형

1 두 점 A(1, −2), B(4, 7)에 대하여 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라고 할 때, $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

2 삼각형 ABC의 두 꼭짓점이 A(0, 4), B(1, 1)이고, 무게중심의 좌표가 (2, 2)일 때, 꼭짓점 C의 좌표는?

① (4, 0) ② (4, 1) ③ (5, 1)
④ (5, 2) ⑤ (6, 1)

3 두 직선 $x+y-3=0$, $2x-3y-1=0$의 교점과 점 (3, 3)을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=x+2$ ② $y=2x-3$
③ $y=2x+1$ ④ $y=3x-6$
⑤ $y=3x-3$

4 다음 중에서 점 (1, −2)를 지나고 직선 $3x-y+6=0$에 평행한 직선 위의 점은?

① (0, 1) ② (2, 3) ③ (3, −3)
④ (4, −1) ⑤ (5, 10)

5 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있고, 두 점 (0, −1), (4, 1)을 지나는 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

6 점 A(0, 2)에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 B, C라고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

7 원 $x^2+y^2+4x-6y+9=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 원점을 중심으로 하는 원이 되었다. 이때 $a+b$의 값은?

① −5 ② −1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

8 점 (1, 0)을 직선 $x+y=b$에 대하여 대칭이동하였더니 점 $(a,\ 2)$가 되었다. 이때 $a+b$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

대 / 단 / 원 평가 문제

1

목표 | 좌표평면 위의 두 점을 연결한 선분을 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이 | 점 $P(a,\ b)$는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이므로 $a=\frac{1\times4+2\times1}{1+2}=2$, $b=\frac{1\times7+2\times(-2)}{1+2}=1$

따라서 $a+b=3$이다. 답 ①

2

목표 | 삼각형의 무게중심의 좌표를 구하는 공식을 활용할 수 있게 한다.

풀이 | 점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$\left(\frac{0+1+x}{3},\ \frac{4+1+y}{3}\right)=(2,\ 2)$

$x=5$, $y=1$

따라서 꼭짓점 C의 좌표는 (5, 1)이다. 답 ③

3

목표 | 두 직선의 교점과 한 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이 | 방정식 $x+y-3=0$, $2x-3y-1=0$을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=1$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{3-1}{3-2}(x-2)$, $y=2x-3$ 답 ②

4

목표 | 한 점을 지나고 주어진 직선에 평행한 직선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이 | 직선 $3x-y+6=0$과 평행한 직선의 기울기는 3이므로 구하는 직선의 방정식은

$y+2=3(x-1)$, $y=3x-5$

따라서 보기에서 이 직선 위에 있는 점은 (5, 10)뿐이다. 답 ⑤

5

목표 | 원 위의 두 점이 주어진 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이 | 원의 중심을 $(a,\ a+1)$이라고 하면

$\sqrt{a^2+(a+1+1)^2}=\sqrt{(a-4)^2+(a+1-1)^2}$

에서 $a=1$이므로 원의 중심은 (1, 2)이고,

반지름의 길이는 $\sqrt{1^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$

답 ⑤

6

목표 | 원 밖의 점에서 원에 그은 접선의 방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 | 접점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 접선의 방정식은

$ax+by=1$

이 접선이 점 A(0, 2)를 지나므로 $2b=1$, $b=\frac{1}{2}$

접점 $(a,\ b)$, 즉 $\left(a,\ \frac{1}{2}\right)$은 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있으므로 $a^2+\frac{1}{4}=1$, $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 점 B, C의 좌표를 $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$로 놓을 수 있으므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 답 ⑤

7

목표| 좌표평면에서 원의 평행이동을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=4$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $(x-a+2)^2+(y-b-3)^2=4$

이 원의 중심이 원점이므로

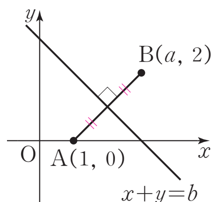
$a-2=0$, $b+3=0$에서 $a=2$, $b=-3$

따라서 $a+b=-1$이다. **답** ②

8

목표| 좌표평면에서 직선에 대한 대칭이동을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 두 점 A$(1,\ 0)$, B$(a,\ 2)$를 지나는 직선은 $x+y=b$와 수직이므로



$\dfrac{2-0}{a-1}=1$, $a=3$

또 두 점 A$(1,\ 0)$, B$(3,\ 2)$의 중점 $(2,\ 1)$은 직선 $x+y=b$ 위의 점이므로

$b=2+1=3$

따라서 $a+b=6$이다. **답** ④

교과서 207 쪽

[해답 p.237]

9 연립부등식 $\begin{cases} y\geq x+2 \\ x^2+y^2\leq 4 \end{cases}$가 나타내는 영역의 넓이는?

① $\pi-2$ ② $\pi+2$ ③ $3\pi-2$
④ $3\pi+2$ ⑤ $4\pi-2$

10 x, y가 부등식 $x\leq 2$, $y\leq 4$, $2x+y\geq 4$를 동시에 만족시킬 때, $x+y$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

서답형

11 두 점 A$(1,\ 5)$, B$(-3,\ -3)$으로부터 같은 거리에 있고, 직선 $y=-x$ 위에 있는 점 P의 좌표를 구하여라.

12 세 점 O$(0,\ 0)$, A$(4,\ 4)$, B$(0,\ 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB가 있다. 삼각형 OAB의 세 꼭짓점에서 각각의 대변에 수선을 그었을 때, 세 수선의 교점의 좌표를 구하여라.

13 직선 $x+ky-2k+3=0$이 실수 k의 값에 관계없이 점 P를 지날 때, 점 P와 직선 $4x-3y-2=0$ 사이의 거리를 구하여라.

14 두 점 A$(-2,\ -3)$, B$(6,\ 1)$을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식은 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이다. 이때 세 실수 a, b, c의 곱 abc의 값을 구하여라.

서술형

15 원 $(x-5)^2+y^2=r^2$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하였더니 직선 $3x-4y+10=0$에 접하였다. 이때 r^2의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

서술형

16 세 점 A$(2,\ 3)$, B$(1,\ 1)$, C$(3,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 그 내부에 속하는 점 $(x,\ y)$에 대하여 $\dfrac{y+1}{x+2}$의 최댓값과 최솟값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

9

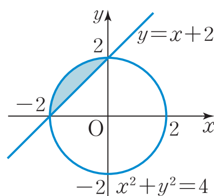
목표| 좌표평면에서 연립부등식이 나타내는 영역의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.

따라서 구하는 영역의 넓이는

$\pi\times 2^2\times\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=\pi-2$

답 ①



(단, 경계선 포함)

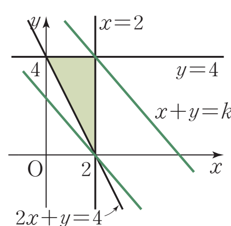
10

목표| 경계가 삼각형인 연립부등식의 영역에서 일차식의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다.

직선 $x+y=k$, 즉 $y=-x+k$를 부등식의 영역과 만나도록 움직여 보면 점 $(2,\ 4)$를 지날 때 k의 최댓값은 6이고, 점 $(2,\ 0)$을 지날 때 k의 최솟값은 2이다.

따라서 구하는 값은 $6+2=8$이다. **답** ③



11

목표| 좌표평면에서 두 점으로부터 같은 거리에 있고, 직선 $y=-x$ 위에 있는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 P의 좌표를 $(a,\ -a)$로 두면 $\overline{PA}=\overline{PB}$이므로

$\sqrt{(a-1)^2+(-a-5)^2}=\sqrt{\{a-(-3)\}^2+\{-a-(-3)\}^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $8a=-8$, $a=-1$

따라서 점 P의 좌표는 P$(-1,\ 1)$이다. **답** P$(-1,\ 1)$

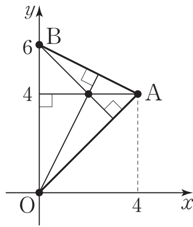
12

목표| 좌표평면에서 삼각형의 각 꼭짓점에서 대변에 그은 세 수선의 교점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 A에서 직선 OB에 그은 수선의 방정식은 $y=4$

직선 AB의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로

점 O에서 직선 AB에 그은 수선의 방정식은 $y=2x$



두 수선의 교점의 좌표를 구하면

$(2,\ 4)$

점 B에서 선분 OA에 그은 수선의 방정식은 $y=-x+6$이고 이 직선도 점 $(2,\ 4)$를 지나므로 세 수선의 교점의 좌표는 $(2,\ 4)$

답 $(2,\ 4)$

13

목표| 주어진 직선이 반드시 지나는 한 점과 다른 직선 사이의 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| 직선 $x+ky-2k+3=0$, 즉 $(x+3)+k(y-2)=0$은 실수 k의 값에 관계없이 점 $(-3,\ 2)$를 지난다.

따라서 점 $\mathrm{P}(-3,\ 2)$와 직선 $4x-3y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4\times(-3)-3\cdot2-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{20}{5}=4$$

답 4

14

목표| 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 점 A, B를 지름의 양 끝으로 하는 원의 중심의 좌표는 $\left(\frac{-2+6}{2},\ \frac{-3+1}{2}\right)=(2,\ -1)$이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{(6-2)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{5}$이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2=20$, $x^2+y^2-4x+2y-15=0$

이 식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$이므로

$a=-4$, $b=2$, $c=-15$

따라서 $abc=(-4)\times2\times(-15)=120$이다.

답 120

15

목표| 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원이 주어진 직선과 접하도록 하는 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이| 원 $(x-5)^2+y^2=r^2$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$(y-5)^2+x^2=r^2$, $x^2+(y-5)^2=r^2$

이 원이 직선 $3x-4y+10=0$에 접하므로

$$|r|=\frac{|3\times0-4\times5+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{10}{5}=2$$

따라서 $r^2=4$이다.

답 4

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식 구하기	30%
	원의 중심과 직선 사이의 거리가 $\lvert r\rvert$와 같음을 이용하여 $\lvert r\rvert$의 값 구하기	40%
답 구하기	r^2의 값 구하기	30%

16

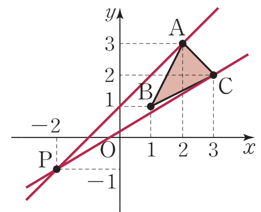
목표| 경계가 삼각형인 연립부등식의 영역에서 분수 꼴의 식의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{y+1}{x+2}=k$ (k는 상수)로 놓으면

$y+1=k(x+2)$ …… ①

직선 ①은 k의 값에 관계없이 점 $\mathrm{P}(-2,\ -1)$을 지나고, 기울기가 k인 직선이다.

오른쪽 그림에서 직선 ①이 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$을 지날 때 k는 최대이고, 점 $\mathrm{C}(3,\ 2)$를 지날 때 k는 최소이다.



따라서 $\frac{y+1}{x+2}$의 최댓값은

$\frac{3-(-1)}{2-(-2)}=1$이고, 최솟값은 $\frac{2-(-1)}{3-(-2)}=\frac{3}{5}$이다.

답 최댓값 : 1, 최솟값 : $\frac{3}{5}$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	$\frac{y+1}{x+2}=k$로 놓기	10%
	직선이 항상 $(-2,\ -1)$을 지남을 알기	20%
	직선을 부등식의 영역과 만나도록 움직여 k가 최대인 점 $(2,\ 3)$을 찾기	20%
	직선을 부등식의 영역과 만나도록 움직여 k가 최소인 점 $(3,\ 2)$를 찾기	20%
답 구하기	최댓값과 최솟값을 각각 구하기	30%

교과서 208 쪽

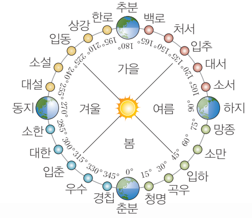
M+ Science

춘분

수 학 ✚ 과 학

황도 좌표와 24절기

24절기란 한 해를 스물넷으로 나눈 것으로 입춘에서 입하 사이를 봄, 입하에서 입추 사이를 여름, 입추에서 입동 사이를 가을, 입동에서 입춘 사이를 겨울이라 하여 사계절의 기본으로 삼는다. 천문학적으로는 황도 좌표의 경도인 황경이 0°인 날을 춘분으로 하여 15° 간격으로 24절기를 나누었는데 90°인 날이 하지, 180°인 날이 추분, 270°인 날이 동지이다. 이와 같은 24절기는 중국의 계절 현상을 기준으로 했기 때문에 우리나라의 기후에 꼭 들어맞지는 않는다. 또한 날짜가 경도에 따라 변하므로 양력은 매년 같지만, 음력은 조금씩 달라지게 된다. 음력의 날짜가 계절과 차이가 많이 날 때에는 윤달(閏月)을 넣어 계절과 맞게 조정하는데, 태양력을 사용하는 오늘날에도 농촌에서는 관습적으로 계절의 변화를 확인하는 데 널리 쓰이고 있다.



절기	입춘	우수	경칩	춘분	청명	곡우	입하	소만	망종	하지	소서	대서
	315°	330°	345°	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°
	입추	처서	백로	추분	한로	상강	입동	소설	대설	동지	소한	대한
	135°	150°	165°	180°	195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°

하지

교과서 209 쪽

M+

추분

수 학 ✚ 과 학

- ■ 춘분(春分): 태양이 적도를 똑바로 비추고 있어서 낮과 밤의 시간이 같아진다. 농촌에서는 흙을 일구고 씨를 뿌릴 준비를 한다. 그러나 2월 바람에 김칫독 깨진다는 속담이 있듯이 바람이 강해 흔히 꽃샘추위가 찾아온다.
- ■ 하지(夏至): 12시에 태양이 가장 높게 있어 북반구에서는 낮 시간이 1년 중 가장 길고, 일사량도 가장 많다. 햇감자가 나오고, 이 시기가 지날 때까지 비가 오지 않으면 마을마다 기우제를 올렸다.
- ■ 추분(秋分): 춘분으로부터 꼭 반년째 되는 날로 낮과 밤의 길이가 똑같아지며, 추분이 지나면 점차 밤이 길어진다. 논밭의 곡식을 거두어들이고, 각종 여름 채소들과 산나물 등을 말려 두기도 한다.
- ■ 동지(冬至): 북반구에서는 1년 중 밤이 가장 길고 낮이 가장 짧은 날이다. 추위도 점차 심해지기 시작한다. 이날 팥죽을 쑤어 이웃과 나누어 먹고, 집안 곳곳에 놓아 악귀를 쫓았다. 새 달력을 만들어 걸었으며, 뱀 사(蛇)자가 쓰인 부적을 벽이나 기둥에 거꾸로 붙여 놓기도 했다. 이날 날씨가 따뜻하면 이듬해에 질병이 많고, 눈이 많이 오고 추우면 풍년이 들 것을 예상하기도 했다.

동지

● 수학 용어

용어	외국어	한자
가정	hypothesis	假定
감소	decreasing	減少
거듭제곱근	radical root	
결론	conclusion	結論
(집합의) 결합법칙	associative law	結合法則
계수	coefficient	係數
계승	factorial	階乘
곱의 법칙	multiplication principle	
공간벡터	space vector	
공간좌표	coordinates in space	空間座標
공비	common ratio	公比
공역	codomain	共域
공집합	empty set	空集合
공차	common difference	公差
교선	line of intersection	交線
교집합	intersection	交集合
(집합의) 교환법칙	commutative law	交換法則
구간	interval	區間
구분구적법	quadrature by parts	區分求積法
귀납적 정의	inductive definition	歸納的定義
귀류법	reduction to absurdity	歸謬法
극값	extreme values	
극대	local maximum	極大
극댓값	local maximum	
극소	local minimum	極小
극솟값	local minimum	
극한(값)	limit (value)	極限
근	root	根
근의 공식	quadratic formula	根 — 公式
근호	radical sign	根號
급수	series	級數
급수의 합	sum of series	級數 — 合
기댓값	expected value	
기울기	slope	
나머지정리	remainder theorem	
내분	internal division	內分
내적	inner product	內積
다항식	polynomial	多項式
다항함수	polynomial function	多項函數
단위벡터	unit vector	
단항식	monomial	單項式
닫힌 구간	closed interval	
대우	contraposition	對偶
대응	correspondence	對應
대입	substitution	代入
대칭이동	reflection	對稱移動
덧셈정리	addition theorem	
도함수	derivatives	導函數

용어	외국어	한자
독립	independence	獨立
독립시행	independent trials	獨立試行
동경	radius	動徑
동류항	similar term	同類項
두 점 사이의 거리	distance between two points	
드모르간의 법칙	De Morgan's law	
등비급수	geometric series	等比級數
등비수열	geometric sequence	等比數列
등비중항	geometric means	等比中項
등차수열	arithmetic sequence	等差數列
등차중항	arithmetic means	等差中項
라디안	radian	
로그	logarithm	
로그함수	logarithmic function	
롤의 정리	Rolle's theorem	
매개변수	parameter	媒介變數
명제	proposition	命題
모분산	population variance	母分散
모비율	population ratio	母比率
모집단	population	母集團
모평균	population mean	母平均
모표준편차	population standard deviation	母標準偏差
무리수	irrational number	無理數
무리식	irrational expression	無理式
무리함수	irrational function	無理函數
무한대	infinity	無限大
미분가능	differentiable	微分可能
미분계수	derivative	微分係數
미적분의 기본 정리	fundamental theorem of calculus	微積分 – 基本定理
미정계수법	method of undetermined coefficients	未定係數法
미지수	unknown	未知數
(로그의) 밑	base	
반닫힌(반열린) 구간	half closed(open) interval	
발산	divergence	發散
방향벡터	direction vector	
배반사건	exclusive events	排反事件
법선벡터	normal vector	
벡터	vector	
벡터의 성분	component of vector	
벡터의 크기	norm of vector	
벤 다이어그램	Venn diagram	
변곡점	point of inflection	變曲點
복소수	complex number	複素數
부등식	inequality	不等式
부분적분법	integration by parts	部分積分法
부분집합	subset	部分集合
부분합	partial sum	部分合
부정	negation	否定

용어	외국어	한자
부정적분	indefinite integral	不定積分
분모의 유리화	rationalization of denominator	分母— 有理化
(집합의) 분배법칙	distributive law	分配法則
불연속	discontinuous	不連續
사이값 정리	intermediate value theorem	
사인	sine	
사인함수	sine function	
삼각비	trigonometric ratio	三角比
삼각함수	trigonometric function	三角函數
삼수선의 정리	theorem of three perpendiculars	三垂線— 定理
상수함수	constant function	常數函數
상수항	constant term	常數項
상용로그	common logarithm	
(집합의) 서로소	disjoint	
수렴	convergence	收斂
수열	sequence	數列
수학적 귀납법	mathematical induction	數學的歸納法
수학적 확률	mathematical probability	數學的確率
순간변화율	instantaneous rate of change	瞬間變化率
순서쌍	ordered pair	順序雙
순열	permutation	順列
시점	initial point	始點
시초선	ray	始初線
시행	trial	試行
식의 값	numerical value of expression	
신뢰구간	confidence interval	信賴區間
신뢰도	confidence coefficient	信賴度
실근	real root	實根
실수	real number	實數
실수배	real number multiple	實數倍
실수부분	real part	實數部分
쌍곡선	hyperbola	雙曲線
쌍곡선의 꼭짓점	vertex of hyperbola	
쌍곡선의 점근선	asymptotic line of hyperbola	雙曲線— 漸近線
쌍곡선의 주축	principal axis of hyperbola	雙曲線— 主軸
쌍곡선의 중심	center of hyperbola	雙曲線— 中心
쌍곡선의 초점	focus of hyperbola	雙曲線— 焦點
x절편	x-intercept	
x좌표	x-coordinate	
x축	x-axis	
여사건	complementary event	餘事件
여집합	complement	餘集合
역	converse	逆
역함수	inverse function	逆函數
연립일차방정식	simultaneous linear equations	聯立一次方程式
연립일차부등식	simultaneous linear inequalities	聯立一次不等式
연속	continuous	連續
연속함수	continuous function	連續函數
연속확률변수	continuous random variable	連續確率變數
열린 구간	open interval	
영벡터	zero vector	
y절편	y-intercept	
y좌표	y-coordinate	
y축	y-axis	
완전제곱식	perfect square(expression)	
외분	external division	外分
우극한	right-handed limit	右極限
원소	element	元素
원순열	circular permutation	圓順列
원점	origin	原點
위치벡터	position vector	
유리식	rational expression	有理式
유리함수	rational function	有理函數
음함수	implicit function	陰函數
이계도함수	second order derivatives	二階導函數
이면각	dihedral angle	二面角
이면각의 면	faces of a dihedral angle	二面角— 面
이면각의 변	edge of dihedral angle	二面角— 邊
이면각의 크기	measure of a dihedral angle	
이산확률변수	discrete random variable	離散確率變數
이차곡선	quadratic curve	二次曲線
이차방정식	quadratic equation	二次方程式
이차함수	quadratic function	二次函數
이항	transposition	移項
이항계수	binomial coefficient	二項係數
이항분포	binomial distribution	二項分布
이항정리	binomial theorem	二項定理
인수	factor	因數
인수분해	factorization	因數分解
인수정리	factor theorem	因數定理
일대일 대응	one to one correspondence	一對一對應
일대일함수	one to one function	一對一函數
일반각	general angle	一般角
일반항	general term	一般項
일차방정식	linear equation	一次方程式
일차부등식	linear inequality	一次不等式
일차함수	linear function	一次函數
임의추출	random sampling	任意抽出
자연로그	natural logarithm	
자연수의 분할	partitions of natural number	自然數— 分割
적분상수	integral constant	積分常數
전개	expansion	展開
전개식	expansion	展開式
전수조사	total inspection	全數調査
전체집합	universal set	全體集合
절대부등식	absolute inequality	絕對不等式

용어	외국어	한자
정규분포	normal distribution	正規分布
정리	theorem	定理
정사영	orthogonal projection	正射影
정의	definition	定義
정의역	domain	定義域
정적분	definite integral	定積分
제곱근	square root	
조건	condition	條件
조건부확률	conditional probability	條件附確率
조립제법	synthetic division	組立除法
조합	combination	組合
종속	dependence	從屬
종점	terminal point	終點
좌극한	left−handed limit	左極限
좌표	coordinate	座標
좌표공간	coordinate space	座標空間
좌표축	coordinate axis	座標軸
좌표평면	coordinate plane	座標平面
주기	period	週期
주기함수	periodic function	週期函數
중근	multiple root	重根
중복순열	repeated permutation	重複順列
중복조합	repeated combination	重複組合
중점	midpoint	中點
증가	increasing	增加
증명	proof	證明
증분	increment	增分
지수함수	exponential function	指數函數
진리집합	truth set	眞理集合
진부분집합	proper subset	眞部分集合
진수	antilogarithm	眞數
집합	set	集合
집합의 분할	partition of a set	集合 — 分割
차수	degree	次數
차집합	difference set	差集合
최대 · 최소 정리	maximum−minimum theorem	最大最小定理
최댓값	absolute maximum	最大
최솟값	absolute minimum	最小
추정	estimation	推定
충분조건	sufficient condition	充分條件
치역	range	値域
치환적분법	integration by substitution	置換積分法
켤레복소수	complex conjugates	
코사인	cosine	
코사인함수	cosine function	
큰 수의 법칙	law of large numbers	
타원	ellipse	楕圓
타원의 꼭짓점	vertex of ellipse	

용어	외국어	한자
타원의 단축	minor axis of ellipse	楕圓 — 短軸
타원의 장축	major axis of ellipse	楕圓 — 長軸
타원의 중심	center axis of ellipse	楕圓 — 中心
타원의 초점	focal point axis of ellipse	楕圓 — 焦點
탄젠트	tangent	
탄젠트함수	tangent function	
통계적 확률	statistical probability	統計的 確率
파스칼의 삼각형	Pascal's triangle	
판별식	discriminant	判別式
평균값 정리	mean value theorem	
평균변화율	mean rate of change	平均變化率
평면벡터	plane vector	
평행이동	translation	平行移動
포물선	parabola	抛物線
포물선의 꼭짓점	vertex of parabola	
포물선의 준선	diretrlx of parabola	抛物線 — 準線
포물선의 초점	focal point of parabola	抛物線 — 焦點
포물선의 축	axis of parabola	抛物線 — 軸
표본	sample	標本
표본분산	sample variance	標本分散
표본비율	sample rate	標本比率
표본조사	sample survey	標本調査
표본평균	sample mean	標本平均
표본표준편차	sample standard deviation	標本標準偏差
표준정규분포	standard normal distribution	標準正規分布
표준화	standardization	標準化
피타고라스 정리	Pythagorean theorem	
필요조건	necessary condition	必要條件
필요충분조건	necessary and sufficient condition	必要充分條件
함수의 그래프	graph of a function	
합성함수	composite function	合成函數
합의 법칙	addition principle	
합집합	union	合集合
항	term	項
항등식	identity	恒等式
항등함수	identity function	恒等函數
해	root	解
허근	imaginary root	虛根
허수	imaginary number	虛數
허수단위	imaginary unit	虛數單位
허수부분	imaginary part	虛數部分
호도법	circular measure	弧度法
확률밀도함수	probability density function	確率密度函數
확률변수	random variable	確率變數
확률분포	probability distribution	確率分布
확률질량함수	probability mass function	確率質量函數

집필진 소개

신항균
현 서울교육대학교 총장

이광연
현 한서대학교 교수

박세원
현 신경대학교 교수

신범영
현 청담중학교 교감

이계세
현 병점고등학교 교사

김정화
현 서울사대부속고등학교 교사

박문환
현 인천인제고등학교 교사

윤정호
현 대구과학고등학교 교사

박상의
현 장충고등학교 교사

서원호
현 청원고등학교 교감

전제동
현 창원중앙고등학교 교사

이동흔
현 하나고등학교 교사

만든 사람들
개발 책임 김경수
편집 윤준원, 김은빛
아트 디렉터 허영인
표지 디자인 김의수
본문 디자인 유지인
컷 김상준, 이도훈
조제판 벽호미디어

고등학교 수학 I 교사용 지도서

2014. 3. 1. 초판 발행 정가 원

지은이 신항균 외 11인
발행인 (주)지학사 서울시 마포구 신촌로 6길 5
인쇄인 (주)벽호 경기도 파주시 한빛로 43
내용 관련 문의 (주)지학사 콘텐츠본부 수학팀 전화 02-330-5440 전송 02-325-8009
구입 관련 문의 (주)지학사 영업본부 영업관리팀 전화 02-330-5302 전송 02-325-8010
공급 업무 대행 사단법인 한국검인정교과서 경기도 파주시 조리읍 당재봉로 29-28
ISBN 978-89-05-04083-3 53410

고|등|학|교 수학 I

ISBN 978-89-05-04083-3